

高中数学竞赛专题讲座

丛书策划　李胜宏
丛书主编　陶平生　苏建一
　　　　　刘康宁　边红平

HANSHU YU HANSHU FANGCHENG

函数与函数方程

本书主编　黄军华



浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 函数与函数方程 / 陶平生等主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.4

ISBN 978-7-308-05236-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陶… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039720 号

函数与函数方程

本书主编　黄军华

责任编辑　吴　慧　杨晓鸣
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　9.75
印　　数　0001—10000
字　　数　186 千
版 印 次　2007 年 4 月第 1 版　2007 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05236-8
定　　价　13.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88072522

编写说明

影响最大、级别最高的中学生"国际数学奥林匹克"(简称IMO)由来已久,自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套"高中数学竞赛专题讲座丛书"。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、李爱国、韦吉珠、张 雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目 录





第一讲 函数的基本概念

"函数"的概念最早是由德国数学家莱布尼茨在1692年的一篇论文中提出的，表示函数的记号 $f(x)$ 是瑞士数学家欧拉于1734年引进的.在中国，函数一词最早出现在1859年李善兰和伟烈亚力合译的《代微积拾级》一书中.

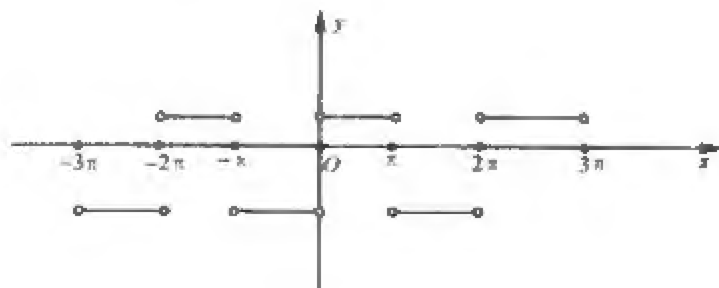
函数的定义伴随着数学的发展也在不断地变化与改进.欧拉曾经把函数定义为"在 xOy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 的关系".随后他又给出了另一定义："如果某些量以如下方式依赖于另一些量，即当后者变化时，前者本身也发生变化，则称前一些量是后一些量的函数."后来傅里叶、柯西、狄利克来和黎曼都给函数下过不同的定义.其中，傅里叶对函数的发展贡献最为突出.他曾指出：任何定义在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的函数都能表示为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的形式.这样，一个式子表示的函数可以是一个不连续的曲线.如

$$y=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots$$

其图象为





甚至狄利克来还给出了一个不能作出图形的函数，即狄利克来函数：

$$f(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数}\\0, x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

傅里叶的工作把函数的研究范围扩展了．这些扩展带来了更广泛意义下的函数的连续性、可微性、可积性的讨论，同时也启发柯西在1821年的《分析教程》中给出了与我们现在中学课本中的函数定义非常相近的一个定义："在某些变数间存在一定的关系，当一经给定其中某一变数之值，其他变数之值亦可随之而确定时，则将最初的变数称之为'自变数'，其他各变数则称之为函数．"

19世纪末，随着集合论的建立，函数概念中关于变量的条件进一步放宽，这时，变量的概念完全被集合的元素所取代．

知识点金

函数的定义：设 A、B 是两个非空的数集，如果存在对应法则 f 满足：对于 A 中的任何一个元素，在 B 中都有唯一确定的元素与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个函数．

A 称为函数 f 的定义域，而把 $C=\{y|y=f(x), x\in A\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域，$C\subseteq B$．

对于映射 $f: A\to B$，若对任意 $x_1, x_2\in A$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称映射 f 为单射；若 B 中的每一个元素都有原象，则称 f 为满射；若 f 既是单射又是满射，则称 f 为双射（一一映射）．

若函数 $f: A\to B$ 是双射，则其逆映射 $f^{-1}: B\to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $y=f^{-1}(x)$．函数与其反函数的定义域与值域是互换的．

例题精析

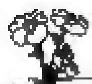
例1 （全国高中数学联赛）已知不等式 $\sin^2 x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围．

分析 因为 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$，原问题可转化为在闭区间上的二次函数问题．

解 原不等式可化为

$$\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\frac{(a-1)^2}{4}.$$

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1, a<0, \frac{a-1}{2}<0$，



所以当 $\cos x=1$ 时，函数 $y=\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2$ 有最大值 $\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2$，

从而有 $\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\frac{(a-1)^2}{4}$.

整理，得 $a^2+a-2\geqslant 0$，

所以 $a\leqslant -2$.

例 2 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，求函数 $g(x)=f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域（其中 $a>0$）.

分析 现已知函数的定义域，而求复合函数的定义域主要是依据以下两点：①求函数 $f(x)$ 的定义域是求自变量 x 的取值范围. ②在对应法则 f 之下，若复合函数的中间变量的取值范围相同，如 $f(\varphi(x))$ 与 $f(g(x))$，则 $\varphi(x)$ 与 $g(x)$ 的取值范围相同.

解 由上面的分析知，$g(x)$ 的定义域为下述不等式组的解集：

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant ax\leqslant\frac{3}{2},\\ -\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{a}\leqslant\frac{3}{2},\end{cases}$$

即 $\begin{cases}-\frac{1}{2a}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2a},\\ -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3a}{2}.\end{cases}$

当 $a\geqslant 1$ 时，$-\frac{a}{2}\leqslant-\frac{1}{2a}$，$\frac{3}{2a}\leqslant\frac{3a}{2}$，

所以定义域为 $\left[-\frac{1}{2a},\frac{3}{2a}\right]$；

当 $0<a<1$ 时，$-\frac{1}{2a}<-\frac{a}{2}$，$\frac{3a}{2}<\frac{3}{2a}$，

所以定义域为 $\left[-\frac{a}{2},\frac{3a}{2}\right]$.

例 3 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(1)=1$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+5)\geqslant f(x)+5$，$f(x+1)\leqslant f(x)+1$. 若 $g(x)=f(x)+1-x$，求 $g(2002)$.

解 由 $g(x)=f(x)+1-x$，得 $f(x)=g(x)+x-1$.

所以 $g(x+5)+x+5-1\geqslant g(x)+(x-1)+5$，

$g(x+1)+(x+1)-1\leqslant g(x)+(x-1)+1$，

即 $g(x+5)\geqslant g(x)$，$g(x+1)\leqslant g(x)$.

所以 $g(x)\leqslant g(x+5)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+3)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x+1)\leqslant g(x)$.



所以 $g(x+1)=g(x)$

这说明 $g(x)$ 是一个以 1 为周期的函数. 又 $g(1)=1$, 故 $g(2002)=1$

例 4 已知函数 $f(x)=\log_x(x+1)$, $x\in(1,+\infty)$, 试比较 $f(x)$, $f(x+1)$ 的大小

分析 $\log_x(x+1)$ 与 $\log_{x+1}(x+2)$ 的大小不能直接观察出来, 我们可以考虑作差

解 $\log_x(x+1)-\log_{(x+1)}(x+2)$

$$=\frac{\lg(x+1)}{\lg x}-\frac{\lg(x+2)}{\lg(x+1)}=\frac{\lg^2(x+1)-\lg x\cdot\lg(x+2)}{\lg x\cdot\lg(x+1)}.$$

因为 $\lg x\cdot\lg(x+2)<\left(\frac{\lg x+\lg(x+2)}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg(x^2+2x)}{2}\right)^2$

$$<\left(\frac{\lg(x+1)^2}{2}\right)^2=\lg^2(x+1),$$

又 $\lg x>0$, $\lg(x+2)>0$,

所以 $f(x)>f(x+1)$.

例 5 设 $f(x)=x^n+ax^2+bx+c$, n 为自然数, 已知 $f(-1)=0$, $f(1)=-6$, $f(2)=-9$, $f(3)=-4$, $f(6)=119$, 求 $f(x)$.

解 由题设有

$$\begin{cases} f(-1)=(-1)^n+a-b+c=0, \\ f(1)=1+a+b+c=-6, \\ f(2)=2^n+4a+2b+c=-9, \\ f(3)=3^n+9a+3b+c=-4, \\ f(6)=2^n\cdot 3^n+36a+6b+c=119. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a-b+c=-(-1)^n, & (1) \\ a+b+c=-7, & (2) \\ 4a+2b+c=-9-2^n, & (3) \\ 9a+3b+c=-4-3^n, & (4) \\ 36a+6b+c=119-2^n\cdot 3^n & (5) \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} a=\frac{1}{6}[3-(-1)^n-2\cdot 2^n], \\ b=\frac{1}{2}[(-1)^n-7], \\ c=-4-\frac{1}{3}[(-1)^n-2^n]. \end{cases}$$

①当 n 为奇数时,



$$\begin{cases} a=\frac{1}{3}(2-2^n), \\ b=-4, \\ c=\frac{1}{3}(-1+2^n) \end{cases}$$

将上列各式的值代入(4)、(5)得

$$3^{n+1}-8\cdot 2^n-17=0, \tag{6}$$

$$2^n\cdot 3^{n+1}-35\cdot 2^n-368=0. \tag{7}$$

(6)代入(7)消去 3^{n+1}，得

$$4\cdot(2^n)^2-9\cdot 2^n-184=0.$$

解得 $n=3$，从而 $a=-2, b=-4, c=-1$. 故得

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-1.$$

②当 n 为偶数时，$a=\frac{1}{3}-\frac{2^n}{3}$，$b=-3$，$c=-\frac{13+2^n}{3}$，同①可得方程

$$2\cdot(2^n)^2-4\cdot 2^n-97=0.$$

这时无整数解 n，故

$$f(x)=x^3-2x^2-4x-1.$$

例6　设有函数

$$f(x)=\sin(x+a_1)+\frac{1}{1\times 2}\sin(x+a_2)+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\sin(x+a_n),$$

其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 证明：

(1)至少有一个实数 x_0，使 $f(x_0)\neq 0$；

(2)如果 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 $x_1-x_2=m\pi$（m 是一个整数）.

分析　(1)注意到 $\frac{1}{1\times 2}\sin(x+a_2)+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\sin(x+a_n)\leqslant\frac{1}{1\times 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}$，可选取 x_0，使 $x=x_0$ 时，$\sin(x+a_1)=1$.

(2)将 $\sin(x+a_i)$ 展开后，将出现 $\sin x$ 与 $\cos x$，再使用辅助角公式.

解　(1)取 $x_0=\frac{\pi}{2}-a_1$，则

$$f(x_0)=1+\frac{1}{1\times 2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a_1+a_2\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a_1+a_n\right)$$

$$\geqslant 1-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r(r+1)}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-a_1+a_{r+1}\right)\right|$$

$$\geqslant 1-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r(r+1)}=\frac{1}{n}>0.$$



故 $f(x_0)\neq 0$.

(2) $f(x)=\left[\sin\alpha_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\sin\alpha_i\right]\cos x+\left[\cos\alpha_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\cos\alpha_i\right]\sin x$

令 $a=\sin\alpha_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\sin\alpha_i$, $b=\cos\alpha_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\cos\alpha_i$,

则 $f(x)=a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, 其中 $a^2+b^2\neq 0$(不然会与(1)的结果矛盾),

$\tan\varphi=\frac{a}{b}$, 其中 φ 所在象限与点 (a,b) 所在象限相同

由 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 可得 $x_1+\varphi=k_1\pi$, $x_2+\varphi=k_2\pi(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$,

所以 $x_1-x_2=m\pi$.

例 7 设正实数 x,y 满足 $xy=1$, 求函数 $f(x,y)=\frac{x+y}{[x]\cdot[y]+[x]+[y]+1}$ 的值域(这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

分析 虽然这个表达式是一个二元函数, 由于 $y=\frac{1}{x}$, 其本质还是中学阶段的一元函数, 本题的关键还是对 $[x]$ 和 $[y]$ 的处理.

解 不妨设 $x\geqslant y$, 则

(1) 当 $x=1$ 时, $y=1$, $f(1,1)=\frac{1}{2}$;

(2) 当 $x>1$ 时, 令 $x=m+\lambda$, 其中 $m=[x]$, $\lambda=x-[x]$.

这样 $y=\frac{1}{m+\lambda}$, $[y]=0$.

所以 $f(x,y)=\frac{m+\lambda+\frac{1}{m+\lambda}}{1+m}$.

又函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增, 且 $0\leqslant\lambda<1$,

所以 $m+\frac{1}{m}\leqslant m+\lambda+\frac{1}{m+\lambda}<m+1+\frac{1}{m+1}$,

即 $\frac{m+\frac{1}{m}}{m+1}\leqslant f(x,y)<\frac{m+1+\frac{1}{m+1}}{1+m}$

令 $a_m=\frac{m+\frac{1}{m}}{m+1}=\frac{m^2+1}{m^2+m}$,



$$b_m=\frac{m+1+\frac{1}{m+1}}{1+m}=1+\frac{1}{(m+1)^2}.$$

则 $a_{m+1}-a_m=\frac{m-2}{m(m+1)(m+2)}$，

所以，当 $m\geq 1$ 时，有 $a_1>a_2=a_3<a_4<\cdots$，而 $b_1>b_2>b_3>\cdots$，

于是 $x\geq 1$ 时，$f(x,y)$ 的值域为 $[a_2,b_1)$，即 $[\frac{5}{6},\frac{5}{4})$

例 8 给出形如 $f(x)=ax+b$ 的非常数函数 f 所组成的非空集合 G，这里 $a,b\in\mathbf{R}$，$a\neq 0$，且 x 为实变数. 若 G 有如下性质

①若 $f,g\in G$，则 $g*f\in G$，其中定义 $(g*f)(x)=g(f(x))$；

②若 $f\in G$，且 $f(x)=ax+b$，那么 f^{-1} 也属于 G，这里 $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$；

③对每一个 $f\in G$，有一个 x_f，使 $f(x_f)=x_f$，称 x_f 为 f 的"不动点".

则当 $b\neq 0$ 时，$f(x)$ 的不动点唯一.

证明 设 $f(x)=ax+b\in G$，若 $a\neq 1$，则 f 的"不动点" $x_f=\frac{b}{1-a}$；

若 $a=1$，则由 $ax_f+b=x_f$，得 $b=0$，即 $f(x)=x$.

设 $g(x)=ax+b$，$\varphi(x)=a'x+b'\in G-\{x\}$，则

$x_g=\frac{b}{1-a}$，$x_\varphi=\frac{b'}{1-a'}$.

因为 $\varphi(x)=g*\varphi*g^{-1}*\varphi^{-1}(x)$

$$=a\left[a'\left(\frac{\frac{x-b'}{a'}-b}{a}\right)+b'\right]+b$$

$$=x-b'-a'b+ab'+b$$

$$=x+(1-a)(1-a')(x_\varphi-x_g)\in G.$$

由开始所述：$(1-a)(1-a')(x_g-x_\varphi)=0$.

从而 $x_g=x_\varphi$

即 G 中一切异于 x 的函数 f，x_f 均为同一值 k，因此结论成立


思考交流

思考题 1 函数 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，且 $f(0)=f(1)$，若对不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$，都



有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$，求证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

证明 不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，则

(1)若 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$，则 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$；

(2)若 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$，则由 $f(0)=f(1)$ 可得

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|$$

$$\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|<1-x_2+x_1-0=1+(x_1-x_2)<\frac{1}{2}$$

思考题2 一辆汽车从 O 点出发沿一条直线公路行驶，其速度 v 保持不变，汽车开动的同时，在与 O 点的距离为 a、与公路线的距离为 b 的地方有一人骑自行车出发，想把一封信递给这辆汽车的司机．问骑自行车的人至少必须以多大的速度行驶，才能实现他的愿望？

解 设 $b>0$（若 $b=0$，即骑自行车者位于公路线上，则问题有显然的解答），骑自行车者位于 M 点，S 是两者的相遇点，$\angle MOS=\alpha$，t 是骑自行车者从出发到相遇所花时间，x 是自行车速度，则在 $\triangle MOS$ 中有 $OS=vt$，$MS=xt$，$OM=a$，应用余弦定理，得到

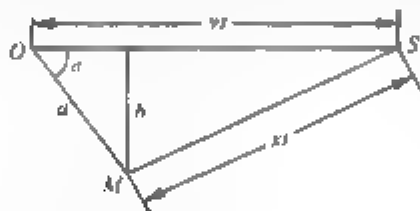
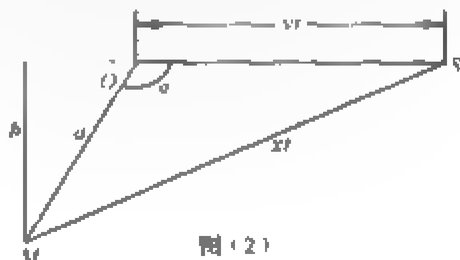


图 1



图(2)

$$x^2t^2=a^2+v^2t^2-2avt\cos\alpha,$$

$$x^2=\frac{a^2}{t^2}-2av\cos\alpha\cdot\frac{1}{t}+v^2$$

$$=\left(\frac{a}{t}-v\cos\alpha\right)^2+v^2\sin^2\alpha, \qquad (1)$$

(i)当 α 为锐角时，由(1)式可知，当 $t=\frac{a}{v\cos\alpha}$ 时，x 取最小值，并且

$$x_{\min}=v\sin\alpha=\frac{vb}{a}（如图(1)），$$

此时骑自行车者赶上汽车所用的时间是 $t=\frac{a}{v\cos\alpha}$，他所走的距离 $MS=v\sin\alpha\cdot\frac{a}{v\cos\alpha}=a\tan\alpha$，此式表明骑自行车者的路线应垂直于 OM.



(2)当 α 为直角或钝角时，不存在骑自行车者赶上汽车的最小速度. 这是因为在图(2)的△OMS 中有 $MS>OS$，即 $xt>vt$，但 x 决不能大于或等于 v.

同步检测 1

1. 对于在区间$[a,b]$上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，如果对于任意 $x\in[a,b]$，均有$|f(x)-g(x)|\leqslant 1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间$[a,b]$上是接近的. 若函数 $y=x^2-3x+4$ 与函数 $y=2x-3$ 在区间$[a,b]$上是接近的，则该区间可以是______

2. 对函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 作 $x=h(t)$ 的代换，则不改变函数 $f(x)$ 值域的代换是……………………………………（　　）

　A. $h(t)=10^t$　　B. $h(t)=t^2$　　C. $h(t)=\sin t$　　D. $h(t)=\log_2 t$

3. 已知 a,b 为实数，集合 $M=\left\{\frac{b}{a},1\right\}$，$N=\{a,0\}$，映射 $f:x\to x$ 表示把集合 M 中的元素 x 映射到集合 N 中仍为 x，则 $a+b$ 等于……………………（　　）

　A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ± 1

4. 已知 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在区间 M 上的反函数是其本身，则 M 可以是……（　　）

　A. $[-2,2]$　　B. $[-2,0]$　　C. $[0,2]$　　D. $(-2,2)$

5. 已知 x,y 在区间$(-2,2)$内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是……………………………………（　　）

　A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{24}{11}$　　C. $\frac{12}{7}$　　D. $\frac{12}{5}$

6. 已知函数 $f(x)=\log_a\left(x+\frac{a}{x}-4\right)(a>0$ 且 $a\neq 1)$的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是______

7. 已知 $A=\{x|x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|2^{1-x}+a\leqslant 0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是______.

8. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足 $f(0)=1$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$______.

9. 将多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$ 表示为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，且 $y=x-4$，则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$______

10. $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的减函数，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$成立，则实数 a 的取值范围是______.

11. 定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的函数 $f(x)$满足：



(1)存在 $a>1$，使 $f(a)\neq 0$；

(2)对任意的实数 b，有 $f(x^b)=bf(x)$。若方程 $f(mx)\cdot f(mx^2)=4f^2(a)$ 的所有解大于 1，求 m 的取值范围。

12. 集合 A 是由适合以下性质的函数 $f(x)$ 构成的：对于任意的 $u、v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant 3|u-v|$。

(1)分别判断函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ 及 $f(x)=\log_2(x+1)$ 是否在集合 A 中，并说明理由；

(2)设函数 $f(x)=ax^2+bx$ 且 $f(x)\in A$，试求 a^2+b^2 的取值范围；

(3)在(2)的条件下，若 $f(2)=6$，且对满足(2)的实数 a，存在最小的实数 m，使得当 $x\in[m,2]$ 时，$|f(x)|\leqslant 6$ 恒成立，试求用 a 表示 m 的表达式。

13. (1)证明：对任意 $x\in[-1,1]$，均有 $|4x^3-3x|\leqslant 1$；

(2)设 $a、b、c$ 为实数，M 是函数 $y=|-4x^3+ax^2+bx+c|$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值，证明：$M\geqslant 1$，并求等号成立时 $a、b、c$ 的值。

14. 已知实数 $x、y$ 满足 $2x^2-4xy+2y^2+x^2y^2\leqslant 9$，求 $u=2\sqrt{2}(x+y)+xy$ 的最大值与最小值

15. 求函数 $y=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}+\sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1}$ 的最小值。



第二讲　函数的图象与性质

知识点金

1. 函数图象的作法

(Ⅰ)描点作图，其步骤是：

(1)确定函数的定义域；

(2)确定函数图象的范围；

(3)求出图象与坐标轴的交点，及图象的极值点；

(4)求出渐近线；

(5)适当地取点列表；

(6)用光滑的曲线将点连接起来.

(Ⅱ)变换作图

(1)对称变换

其主要结论有

①$y=f(x)$与$y=-f(x)$的图象关于x轴对称；

②$y=f(x)$与$y=f(-x)$的图象关于y轴对称；

③$y=f(x)$与$y=-f(-x)$的图象关于原点对称；

④$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称

(2)平移变换

①函数$y=f(x+a)$的图象可以由函数$y=f(x)$的图象沿x轴方向平移a个单位得到($a>0$时，向左平移；$a<0$时，向右平移)；

②函数$y=f(x)+b$的图象可由函数$y=f(x)$的图象沿y轴方向平移b个单位得



到($b>0$时,向上平移;$b<0$时,向下平移).

(3)伸缩变换

①函数$y=f(\omega x)$的图象,可由$y=f(x)$的图象沿x轴方向将横坐标(纵坐标不变)伸($0<|\omega|<1$)缩($|\omega|>1$)$\frac{1}{|\omega|}$倍得到;

②函数$y=Af(x)$的图象,可由函数$y=f(x)$的图象沿y轴方向(横坐标不变)将纵坐标伸($|A|>1$)缩($0<|A|<1$)$|A|$倍得到.

2. 函数的单调性

(1)设函数$f(x)$在区间I上是可导的,当$f'(x)\geqslant 0$(等于0的点只是离散的点),则函数$f(x)$在I上是单调递增的,当$f'(x)\leqslant 0$(同样等于0的点只是离散的点),则函数$f(x)$在I上是单调递减的;

(2)如果函数$f(x)$在I上存在反函数且为单调的,则其反函数与$f(x)$有相同的单调性;

(3)若函数$u=g(x)$在I上,$y=f(x)$在D上均为单调函数,且$g(x)$的值域为G,$G\cap D\neq\varnothing$,则当$u=g(x)$和$y=f(x)$的增减性相同(相反)时,复合函数$y=f[g(x)]$在定义域上是增(减)函数.

3. 函数的奇偶性

(1)$y=f(x)$,$x\in A$是奇函数$\Leftrightarrow$定义域A关于原点对称且$f(x)=-f(-x)$

$y=f(x)$,$x\in A$是偶函数$\Leftrightarrow$定义域A关于原点对称且$f(-x)=f(x)$

(2)$y=f(x)$的图像关于直线$x=a$对称,则$f(a-x)=f(a+x)$,

$y=f(x)$的图象关于点$(a,0)$对称,则$f(a-x)=-f(a+x)$

(3)定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$总可以表示为一个奇函数$g(x)$与一个偶函数$h(x)$之和,其中$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$

4. 函数的周期性

(1)设函数的定义域为A,若存在非零常数T使$f(x)$满足:

①对于$\forall x\in A$有$x+T\in A$;

②$f(x+T)=f(x)$,

则称$f(x)$为周期函数,常数T为它的一个周期.

由此定义知:定义域A至少一端无界,如果T是函数$f(x)$的周期,则$nT(n\in\mathbf{N})$也是$f(x)$的周期.

(2)设函数$f(x)$满足$f(a+x)=\pm f(a-x)$,$f(b+x)=\pm f(b-x)$($a\neq b$),若两式同号,则$f(x)$可以是以$2(b-a)$为周期的周期函数;若两式不同号,则$f(x)$可以是以$4(b-a)$为周期的周期函数.

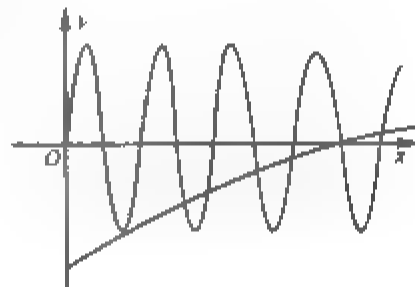


(3)设 λ 为非零常数,若对函数 $f(x)$ 定义域中的任意 x,恒有 $f(x+\lambda)=\varphi[f(x)]$,其中 $\varphi^{(n)}(x)=x$,但对 $1\leqslant i<n$,$\varphi^{(i)}(x)\neq x$,则 $f(x)$ 是以 $n\lambda$ 为周期的周期函数.若 λ 为满足条件的最小正数,则 $n\lambda$ 为 $f(x)$ 的最小正周期(这里 $\varphi^{(0)}(x)=x$,$\varphi^{(i+1)}(x)=\varphi[\varphi^{(i)}(x)]$,$i=0,1,2,\cdots$).



例题精析

例1　求方程 $\frac{1}{5}\log_2 x=\sin 5\pi x$ 的实数解的个数.



分析　这是一个超越方程,要想用初等方法求出其解是不可能的,但我们可以借助于图象解题.

解　因为 $|\sin 5\pi x|\leqslant 1$,

故 $\left|\frac{1}{5}\log_2 x\right|\leqslant 1$,

所以 $\frac{1}{32}\leqslant x\leqslant 32$.

考虑 $y=\frac{1}{5}\log_2 x$ 和 $y=\sin 5\pi x$ 的图象.

当 $\frac{1}{32}\leqslant x<1$ 时,$-1\leqslant\frac{1}{5}\log_2 x<0$,此时当 $\frac{1}{5}<x<\frac{2}{5}$,$\frac{3}{5}<x<\frac{4}{5}$ 时,$-1\leqslant\sin 5\pi x<0$,且 $x=\frac{3}{10}$,$\frac{7}{10}$ 时,$\sin 5\pi x=-1$,两函数的图象在 $\left[\frac{1}{32},1\right)$ 内有4个交点.

当 $1<x\leqslant 32$ 时,$0<\frac{1}{5}\log_2 x\leqslant 1$,而当 $\frac{2k}{5}<x<\frac{2k+1}{5}$($k=3,4,\cdots,79$)时,$0<\sin 5\pi x\leqslant 1$,在上述77个区间中,两函数的图象有154个交点.当 $x=1$ 时,两个函数也有一个交点.

故共有 $4+154+1=159$ 个交点.

例2　函数 $y=f(x)$ 定义在整个实数轴上,它的图象在围绕坐标原点旋转角 $\frac{\pi}{2}$ 后不变.

(1)证明:方程 $f(x)=x$ 恰有一个解;

(2)试举出一个具有上述性质的函数的例子.

证明　(1)设 $f(0)=y_0$,则 $(0,y_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象上的点,把该点按同一方向绕原点旋转两次,每次旋转角度为 $\frac{\pi}{2}$,得到点 $(0,-y_0)$ 仍在 $y=f(x)$ 的图象上,所以 y_0



$f(0)=-y_0$，这样 $y_0=0$，即 $f(0)=0$. 这说明 $x=0$ 是方程 $f(x)=x$ 的一个解.

另一方面，设 $x=x_0$ 是方程 $f(x)=x$ 的一个解，即 $f(x_0)=x_0$，因此点 (x_0,x_0) 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，它绕原点旋转 3 个 $\frac{\pi}{2}$ 后得到点 $(x_0,-x_0)$，且此点也在 $y=f(x)$ 的图象上，所以 $x_0=f(x_0)=-x_0$，即 $x_0=0$. 这说明当 x_0 为方程 $f(x)=x$ 的解时，一定有 $x_0=0$，故 $f(x)=x$ 只有唯一一个解.

(2)构造函数如下：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ -\frac{1}{2}x, & \text{当 } 4^k\leqslant |x|<2\cdot 4^k \text{ 时},\\ 2x, & 2\cdot 4^{k-1}\leqslant |x|<4^k \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $k\in\mathbf{Z}$.

例 3 设函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是严格递增的，且对每个 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(f(n))=kn$，求证：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $\frac{2kn}{k+1}\leqslant f(n)\leqslant\frac{1}{2}(k+1)n$.

证明 由于 f 严格递增且取整数值，所以

$f(n+1)\geqslant f(n)+1$，

从而对 $m\geqslant n$，有

$f(m)=f(n+m-n)\geqslant f(n)+m-n$

取 $m=f(n)$，得

$f(f(n))-f(n)\geqslant f(n)-n$，

所以 $f(n)\leqslant\frac{1}{2}(n+kn)=\frac{1}{2}(k+1)n$.

又 $kn=f(f(n))\leqslant\frac{1}{2}(k+1)f(n)$，

故 $f(n)\geqslant\frac{2kn}{k+1}$.

例 4 设 f 是一个从实数集 $\mathbf{R}$ 映射到自身的函数，并且对任何的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $|f(x)|\leqslant 1$，以及 $f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)$. 求证：$f(x)$ 是周期函数.

证明 注意到 $\frac{13}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，

所以 $\left(x+\frac{1}{6}\right)-x=\left(x+\frac{13}{42}\right)-\left(x+\frac{1}{7}\right)$.

依题意，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有



$f\left(x+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)$,

所以 $f\left(x+\frac{1}{7}\right)-f(x)$

$=f\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{7}\right]-f\left(x+\frac{1}{6}\right)$

$=f\left(x+\frac{2}{6}+\frac{1}{7}\right)-f\left(x+\frac{2}{6}\right)$

$=\cdots$

$=f\left(x+\frac{n}{6}+\frac{1}{7}\right)-f\left(x+\frac{n}{6}\right)$,其中 $n\in\mathbf{N}$.

因为 $f\left(x+\frac{n}{6}\right)-f(x)$

$=f\left(x+\frac{n}{6}+\frac{1}{7}\right)-f\left(x+\frac{1}{7}\right)$

$=f\left(x+\frac{n}{6}+\frac{2}{7}\right)-f\left(x+\frac{2}{7}\right)$

$=\cdots$

$=f\left(x+\frac{n}{6}+\frac{m}{7}\right)-f\left(x+\frac{m}{7}\right)$,其中 $m,n\in\mathbf{N}$.

在上式中令 $n=6,m=7$ 得

$f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1)$.

所以 $f(x+n)=f(x)+\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x+k)-f(x+k-1)]$

$=f(x)+n[f(x+1)-f(x)]$

对任意 $n\in\mathbf{N}$ 恒成立.

若 $f(x+1)-f(x)\neq0$,则当 $n\to+\infty$ 时,有 $|f(x+n)|\to+\infty$,与 $|f(x)|\leqslant1$ 矛盾.

故 $f(x+1)-f(x)=0$,即 $f(x+1)=f(x)$.

所以 $f(x)$ 是周期为 1 的函数.

例 5 函数 $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ 定义如下

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为无理数},\\ \dfrac{p+1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,q\in\mathbf{N}^*,(p,q)=1,p<q)\end{cases}$$

求 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$ 上的最大值.

解 当 $x\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$ 且 x 为无理数时,$f(x)<\frac{8}{9}$;设 $x=\frac{p}{q}\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$,则由 $\frac{7}{8}<\frac{p}{q}<$



$\frac{8}{9}$，可知 $8q-9p\geq1$，$8p-7q\geq1$。

于是 $7(8q-9p)+8(8p-7q)\geq15$，故 $p\geq15$。

同理 $q\geq17$，记 $q-p=t$，则 $1\leq8t-p$，$t\geq\frac{p+1}{8}$。

这时 $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p+1}{q}=\frac{p+1}{p+t}\leq\frac{p+1}{p+\frac{p+1}{8}}=\frac{8p+8}{9p+1}$

$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{p+1}{p+\frac{1}{9}}=\frac{8}{9}\left[1+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{9}}\right]$$

$$\leq\frac{8}{9}\left(1+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{15+\frac{1}{9}}\right)=\frac{16}{17}$$

当 $\frac{p}{q}=\frac{15}{17}$ 时，$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{16}{17}$，故所求最大值为 $\frac{16}{17}$

例6 设 f 是定义在 N 上的递增函数，且满足：对于任一对整数 $k,l\in N^*$，有 $f(k\cdot l)=f(k)+f(l)$。证明：存在实数 $p>1$，使当 $n=1,2,3,\cdots$ 时，$f(n)=\log_p n$。

证明 由 $f(k\cdot l)=f(k)+f(l)$，易知有 $f(m^s)=sf(m)$。 ①

特别地，$f(1)=f(1^2)=2f(1)$，即 $f(1)=0$。又因为 f 是递增函数，所以 $f(2)>f(1)=0$。

设 $p=\sqrt[f(2)]{2}(>1)$。

对于任何自然数 $n\geq2$，存在自然数 r 适合 $2^r\leq n\leq2^{r+1}$。 ②

从而 $rf(2)\leq\log_p n<rf(2)+f(2)$。 ③

因为 f 是递增函数，故由②得 $rf(2)=f(2^r)\leq f(n)<f(2^{r+1})=(r+1)f(2)$。 ④

由③、④得

$-f(2)<f(n)-\log_p n<f(2)$。 ⑤

在⑤式中用 n^k 代 n（k 是任意自然数），得

$-f(2)<kf(n)-k\log_p n<f(2)$，

即 $-\frac{f(2)}{k}<f(n)-\log_p n<\frac{f(2)}{k}$。

令 $k\to\infty$，得 $f(n)=\log_p n\quad(n\geq2)$。

这个关系式对 $n=1$ 也成立，即 $f(1)=0=\log_p 1$。

例7 已知 $f_0(x)=x^n$，$f_k(x)=\frac{f_{k-1}'(x)}{f_{k-1}(1)}$，其中 $k\leq n(n,k\in N^*)$。

设 $F(x)=C_n^0f_0(x^2)+C_n^1f_1(x^2)+\cdots+C_n^kf_k(x^2)+\cdots+C_n^nf_n(x^2)$，$x\in[-1,1]$



(1)写出 $f_k(1)$；

(2)证明：对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$，恒有 $|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant 2^{n-1}(n+2)-n-1$.

分析 (1)由已知推得 $f_k(x)=(n-k+1)x^{n-k}$，从而有 $f_k(1)=n-k+1$.

(2)证法 1 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$F(x)=x^{2n}+nC_n^1x^{2(n-1)}+(n-1)C_n^2x^{2(n-2)}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{2(n-k)}+\cdots+2C_n^{n-1}x^2+1$$

当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数.

因为函数 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为偶函数，所以 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 上为减函数

所以对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$，$|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant F(1)-F(0)$

$F(1)-F(0)=C_n^0+nC_n^1+(n-1)C_n^2+\cdots+(n-k+1)C_n^k+\cdots+2C_n^{n-1}$

$=nC_n^{n-1}+(n-1)C_n^{n-2}+\cdots+(n-k+1)C_n^{n-k}+\cdots+2C_n^1+C_n^0$，

因为 $(n-k+1)C_n^{n-k}=(n-k)C_n^{n-k}+C_n^{n-k}=nC_{n-1}^{n-k-1}+C_n^{n-k}$，$(k=1,2,3,\cdots,n-1)$

所以 $F(1)-F(0)=n(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-3}+\cdots+C_{n-1}^{0})+(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})+C_n^0$

$=n(2^{n-1}-1)+2^n-1=2^{n-1}(n+2)-n-1$.

因此结论成立.

证法 2 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$F(x)=x^{2n}+nC_n^1x^{2(n-1)}+(n-1)C_n^2x^{2(n-2)}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{2(n-k)}+\cdots+2C_n^{n-1}x^2+1.$$

当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数.

因为 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为偶函数，所以 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 为减函数.

所以对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$，$|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant F(1)-F(0)$.

$F(1)-F(0)=C_n^0+nC_n^1+(n-1)C_n^2+\cdots+(n-k+1)C_n^k+\cdots+2C_n^{n-1}$，

又因为 $F(1)-F(0)=2C_n^1+3C_n^2+\cdots+kC_n^{k-1}+\cdots+nC_n^{n-1}+C_n^0$，

所以 $2[F(1)-F(0)]=(n+2)[C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{k-1}+\cdots+C_n^{n-1}]+2C_n^0$，

$$F(1)-F(0)=\frac{n+2}{2}[C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{k-1}+\cdots+C_n^{n-1}]+C_n^0$$

$$=\frac{n+2}{2}(2^n-2)+1=2^{n-1}(n+2)-n-1.$$

因此结论成立.

证法 3 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$F(x)=x^{2n}+nC_n^1x^{2(n-1)}+(n-1)C_n^2x^{2(n-2)}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{2(n-k)}+\cdots+2C_n^{n-1}x^2+1$$

当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数.

因为函数 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为偶函数，所以 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 上为减函数



所以对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$，$|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant F(1)-F(0)$.

$F(1)-F(0)=C_n^0+nC_n^1+(n-1)C_n^2+\cdots+(n-k+1)C_n^k+\cdots+2C_n^{n-1}$

由 $x[(1+x)^n-x^n]=x[C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^kx^{n-k}+\cdots+C_n^{n-1}x+1]$

$=C_n^1x^n+C_n^2x^{n-1}+\cdots+C_n^kx^{n-k+1}+\cdots+C_n^{n-1}x^2+x$.

对上式两边求导得

$(1+x)^n-x^n+nx(1+x)^{n-1}-nx^n=nC_n^1x^{n-1}+(n-1)C_n^2x^{n-2}+\cdots+(n-k+1)C_n^kx^{n-k}+\cdots+2C_n^{n-1}x+1$.

$F(x)=(1+x^2)^n+nx^2(1+x^2)^{n-1}-nx^{2n}$

所以 $F(1)-F(0)=2^n+n\cdot2^{n-1}-n-1=2^{n-1}(n+2)-n-1$

因此结论成立.

例8 设 a 为实数，记函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(1)设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 表示为关于 t 的函数 $m(t)$；

(2)求 $g(a)$；

(3)试求满足 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a.

解 (1)因为 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，

所以要使 t 有意义，必须 $1+x\geqslant0$ 且 $1-x\geqslant0$，即 $-1\leqslant x\leqslant1$.

又因为 $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$，且 $t\geqslant0$①，所以 t 的取值范围是 $[\sqrt{2},2]$.

由①得 $\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}t^2-1$，所以 $m(t)=a\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$.

(2)由题意知 $g(a)$ 即为函数 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的最大值.

因为直线 $t=-\frac{1}{a}$ 是抛物线 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$ 的对称轴，所以可分以下几种情况进行讨论.

①当 $a>0$ 时，函数 $y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向上的抛物线的一段，

由 $t=-\frac{1}{a}<0$ 知 $m(t)$ 在 $t\in[\sqrt{2},2]$ 上单调递增，故 $g(a)=m(2)=a+2$；

②当 $a=0$ 时，$m(t)=t$，$t\in[\sqrt{2},2]$，有 $g(a)=2$；

③当 $a<0$ 时，函数 $y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向下的抛物线的一段，若 $t=-\frac{1}{a}\in(0,\sqrt{2}]$，即 $a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$；

若 $t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$，即 $a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right]$ 时，$g(a)=m\left(-\frac{1}{a}\right)=-a-\frac{1}{2a}$，



若 $t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$，即 $a\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 时，$g(a)=m(2)=a+2$.

综上所述，有 $g(a)=\begin{cases} a+2, & \left(a>-\frac{1}{2}\right),\\ -a-\frac{1}{2a}, & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant -\frac{1}{2}\right),\\ \sqrt{2}, & \left(a\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{cases}$

(3) 当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，$g(a)=a+2>\frac{3}{2}>\sqrt{2}$；

当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$-a\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$-\frac{1}{2a}\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，所以 $-a\neq-\frac{1}{2a}$，

$g(a)=-a-\frac{1}{2a}>2\sqrt{(-a)\cdot\left(-\frac{1}{2a}\right)}=\sqrt{2}$，故当 $a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$g(a)>\sqrt{2}$；

当 $a>0$ 时，$\frac{1}{a}>0$，由 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 知 $a+2=\frac{1}{a}+2$，故 $a=1$；

当 $a<0$ 时，$a\cdot\frac{1}{a}=1$，故 $a\leqslant-1$ 或 $\frac{1}{a}\leqslant-1$，从而有 $g(a)=\sqrt{2}$ 或 $g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$.

要使 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$，必须有 $a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{1}{a}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

此时，$g(a)=\sqrt{2}=g\left(\frac{1}{a}\right)$.

综上所述，满足 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a 为：$-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=1$.

思考交流

思考题 1 设函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$ $(a\neq b)$，则 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数．若在 $x=a$，$x=b$ 之间 $f(x)$ 再没有平行于 y 轴的对称轴，则 $T=2(b-a)$ 是 $f(x)$ 的最小正周期．

证明 由条件易得 $f(2a-x)=f(x)$，$f(2b-x)=f(x)$，不妨设 $b>a$，则

$f(x+2(b-a))=f(2b-x-2b+2a)=f(2a-x)=f(x)$，

所以 $2(b-a)$ 是函数 $y=f(x)$ 的周期．

若 $f(x)$ 有小于 $2(b-a)$ 的正周期，则可设 $T'=\frac{2(b-a)}{k}$，$k>1$．于是，

$f(x)=f(2a-x)=f(T'+2a-x)$

$=f\left[\frac{2(b-a)}{k}+2a-x\right]$

$=f\left[2\cdot\frac{b+(k-1)a}{k}-x\right]$,

则 $x=\frac{b+(k-1)a}{k}$ 为 $f(x)$ 的一条平行于 y 轴的对称轴.

又 $a=\frac{a+(k-1)a}{k}<\frac{b+(k-1)a}{k}<\frac{b+(k-1)b}{k}=b$,

所以在 a,b 之间 $f(x)$ 有一条对称轴 $x=\frac{b+(k-1)a}{k}$,矛盾.

思考题 2 设 $f(x)$,$g(x)$是定义在实数集 R 上的函数,证明:存在 $x_0,y_0\in\mathbf{R}$,使得 $|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}$.

证明 假设结论不成立,则对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,都有

$|xy-f(x)-g(y)|<\frac{1}{4}$.

取$(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$可得

$$|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}, \quad ①$$

$$|f(0)+g(1)|<\frac{1}{4}, \quad ②$$

$$|f(1)+g(0)|<\frac{1}{4}, \quad ③$$

$$|1-f(1)-g(1)|<\frac{1}{4}. \quad ④$$

由①、②知

$|f(0)+g(0)-[f(0)+g(1)]|\leqslant|f(0)+g(0)|+|f(0)+g(1)|<\frac{1}{2}$,

$$即|g(0)-g(1)|<\frac{1}{2}. \quad ⑤$$

同理,由③、④知

$$|1+g(0)-g(1)|<\frac{1}{2}. \quad ⑥$$

又 $|g(0)-g(1)-[1+g(0)-g(1)]|\leqslant|g(0)-g(1)|+|1+g(0)-g(1)|<1$,

故得 $1<1$,这是不可能的.

故原结论成立.



同步检测2

1. 设函数 $y=f(x)$ 对一切实数 x 都满足 $f(3+x)=f(3-x)$，方程 $f(x)=0$ 恰有 6 个不同的实数根，则这 6 个实数根的和是 …………（　　）

A. 18　　B. 12　　C. 9　　D. 0

2. 设有三个函数，第一个函数是 $y=\varphi(x)$，它的反函数就是第二个函数，而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线 $x+y=0$ 对称，那么第三个函数是 ……（　　）

A. $y=-\varphi(x)$　　B. $y=-\varphi(-x)$

C. $y=-\varphi^{-1}(x)$　　D. $y=-\varphi^{-1}(-x)$

3. 若 $a>0, a\neq 1, F(x)$ 是一奇函数，则 $G(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$ 是 ……（　　）

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 奇偶性与 a 相关

4. 对于每个实数 x，设 $f(x)$ 是 $4x+1$，$x+2$ 和 $4-2x$ 三个函数中的最小值，则 $f(x)$ 的最大值是 ……………………（　　）

A. $\frac{8}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 设 $f(x)$ 是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数，且为偶函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{1998}}$，则 $f\left(\frac{98}{19}\right)$，$f\left(\frac{101}{17}\right)$，$f\left(\frac{104}{15}\right)$ 由小到大的排列是 ……………（　　）

A. $f\left(\frac{101}{17}\right)$，$f\left(\frac{98}{19}\right)$，$f\left(\frac{104}{15}\right)$　　B. $f\left(\frac{98}{19}\right)$，$f\left(\frac{104}{15}\right)$，$f\left(\frac{101}{17}\right)$

C. $f\left(\frac{104}{15}\right)$，$f\left(\frac{98}{19}\right)$，$f\left(\frac{101}{17}\right)$　　D. $f\left(\frac{101}{17}\right)$，$f\left(\frac{104}{15}\right)$，$f\left(\frac{98}{19}\right)$

6. 设 $f(x)=x+1, g(x)=x^2, A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant a\}$，则使 $\{y\mid y=f(x), x\in A\}=\{y\mid y=g(x), x\in A\}$ 成立的 a 值是________

7. 设定义在整数集上的函数 f 满足 $f(n)=\begin{cases}n-5, & (n\geqslant 2000),\\ f[f(n+8)], & (n<2000),\end{cases}$ 则 $f(1993)=$________

8. 集合 $\{x\mid -1\leqslant \log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2}, x\in \mathbf{N}^*\}$ 的真子集的个数是________.

9. 设 $a>0$，已知 $f(x)=\log_a\frac{2-a+x}{a-x}$ 是奇函数，$g(x)=\frac{x}{x+1}$，试比较 $f^{-1}(n)$ 与 $g(n)$ 的大小。



10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，对任意的实数 x_1、x_2 都满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，当 $x>0$ 时 $f(x)>0$ 且 $f(2)=3$.

(1) 试判断 $f(x)$ 的奇偶性和单调性；

(2) 当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 对所有的 θ 均成立，求实数 m 的取值范围.

11. 已知 $a>0$，$a\neq1$，设 P：函数 $y=\log_a(x-1)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 内单调递减；Q：曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于不同的两点. 如果 P 与 Q 有且只有一个正确，求 a 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x)=\log_m\frac{x-3}{x+3}$.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$ $(\beta>\alpha>0)$，判断 $f(x)$ 在定义域上的增减性，并加以说明；

(2) 当 $0<m<1$ 时，是否存在 m 使 $f(x)=\log_m\frac{x-3}{x+3}$ $[\alpha,\beta]$ $(\beta>\alpha>0)$ 上的值域为 $[\log_m m(\beta-1),\log_m m(\alpha-1)]$？请说明理由.

13. 已知 $f(x)=\log_4(4^x+1)+kx$ $(k\in\mathbf{R})$ 是偶函数.

(1) 求 k 的值；

(2) 证明：对任意实数 b，函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 最多只有一个交点；

(3) 设 $g(x)=\log_4\left(a\cdot2^x-\frac{4}{3}a\right)$，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个公共点，求实数 a 的取值范围.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R 且 $f(x+1)=-\frac{1}{f(x)}$，如果 $f(x)$ 是奇函数，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=3^x$.

(1) 求 $f\left(\frac{2001}{4}\right)$；

(2) 当 $2k+\frac{1}{2}<x<2k+1$ 时，求 $f(x)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的解析式；

(3) 是否存在正整数 k，使当 $2k+\frac{1}{2}<x<2k+1$ 时，$\log_3 f(x)>x^2-kx-2k$ 有解？

15. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}$，$x\in A$，其中 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left[-n,-n+\frac{1}{n+1}\right]\cup\left[(n-1),(n-1)+\frac{n}{n+1}\right]\right)$，判断 $f(x)$ 的周期性.



16. 设 λ 为大于零的常数，$f(x+\lambda)=F(f(x))$，其中 $F(x)=F^{-1}(x)$（F^{-1} 是 F 的反函数），则 $f(x)$ 为周期等于 2λ 的周期函数

17. 质点在 x 轴上的运动速度为 2 米/秒，在平面上其他地方的运动速度为 1 米/秒，试绘出质点从原点出发 1 秒内所能到达的区域的图象。

18. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取值于某个长度为 1 的区间上，记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，$y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$，求 $f=y-\bar{x}^2$ 的最大值



第三讲　函数的值域与最值

知识点金

1. 设函数的定义域为 D，若存在 $x_0\in D$ 使得对于任意 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最大值，记作 f_{max}；若存在 $x_0\in D$，使得对任意 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最小值，记为 f_{min}。

2. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，如果存在 $x_0\in(a,b)$ 及正数 ε，使得当 $|x-x_0|<\varepsilon$ 时都有：

(1) $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的一个极大值，x_0 称为 $f(x)$ 的一个极大值点；

(2) $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的一个极小值，x_0 称为 $f(x)$ 的一个极小值点

设 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 $m+1$ 个极大值点，$y_0,y_1,\cdots,y_n$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个极小值点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值、最小值为

$f_{max}=\max\{f(a),f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_m),f(b)\}$，

$f_{min}=\min\{f(a),f(y_0),f(y_1),\cdots,f(y_n),f(b)\}$。

函数的值域与最值（极值）是紧密相连的，本讲我们介绍一些常用的求函数的值域与最值的方法





例题精析

(Ⅰ)用逆向法求函数的值域

例 1 求下列函数的值域：

(1) $y=\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}$；(2) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

解 由已知可得 $2(y-1)\sin x=-(1+y)$.

显然，$y\neq1$.

所以 $\sin x=\frac{1+y}{2(1-y)}$.

由 $\left|\frac{1+y}{2(1-y)}\right|=|\sin x|\leqslant1\Leftrightarrow(1+y)^2\leqslant4(1-y)^2\Leftrightarrow y\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$.

所以函数的值域为 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$.

(2)由已知，可得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$.

解不等式 $\frac{1+y}{1-y}>0$，得 $-1<y<1$，因此所求函数的值域为 $(-1,1)$.

(Ⅱ)用配方法求函数的值域

例 2 试求函数 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$ 在闭区间 $[-3,3]$ 上的最大值与最小值.

解 令 $t=x^2+5x$，则

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+5\\
&=(t+4)(t+6)+5\\
&=(t+5)^2+4.
\end{aligned}
$$

当 $x\in[-3,3]$ 时，t 的取值范围是 $\left[-\frac{25}{4},24\right]$，于是我们只需求二次函数 $f(t)=(t+5)^2+4$，$t\in\left[-\frac{25}{4},24\right]$ 上的最大值与最小值.

易知 $t=-5$ 时，$f_{\min}=4$.

由 $x^2+5x=-5$，得 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$（负号舍去），故当 $x=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ 时，$f_{\min}=4$

当 $t=-\frac{25}{4}$ 时，$f(t)=5\frac{9}{16}$



当 $t=24$ 时，$f(t)=845$。由 $x^2+5x=24$ 得 $x=\frac{-5\pm 11}{2}$（负号舍去）

所以当 $x=3$ 时，$f_{max}=845$。

例 3 试求函数 $f(x,y)=6(x^2+y^2)(x+y)-4(x^2+xy+y^2)-3(x+y)+5$ 在区域 $A=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ 上的最小值.

解 (1)当 $x+y\leqslant 1$ 时，$xy\leqslant\frac{1}{4}(x+y)^2\leqslant\frac{1}{4}$.

所以
$$\begin{aligned}f(x,y)&=6(x^3+y^3)+6xy(x+y)-4xy\\&\quad-4(x^2+y^2)-3(x+y)+5\\&=6\left(xy-\frac{1}{4}\right)(x+y-1)+6x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\\&\quad+6y\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(x+y-1)^2+2\\&=6\left(xy-\frac{1}{4}\right)(x+y-1)+(6x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\\&\quad+(6y+1)\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(x+y-1)^2+2\\&\geqslant 2,\end{aligned}$$

当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时等号成立.

(2)当 $x+y>1$ 时，$x^2+y^2\geqslant\frac{1}{2}(x+y)^2>\frac{1}{2}$.

所以 $f(x,y)=6\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}\right)(x+y-1)+2(x-y)^2+2>2$.

综上所述，对任意 $(x,y)\in A$，$f(x,y)\geqslant 2$，当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号.

故 $f_{min}=2$.

例 4 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}(n\geqslant 2)$，且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=1$. 对于每一个固定的 k $(1\leqslant k\leqslant n,k\in\mathbf{N})$，求 $|x_k|$ 的最大值.

分析 注意到已知等式的左边是二次式，且有平方项，显然 x_i 与 x_{n+1-i} 的属性相同，故可考虑如下配方.

解 因为 $1=(\sqrt{a_1}x_1+\sqrt{1-a_2}x_2)^2+(\sqrt{a_2}x_2+\sqrt{1-a_3}x_3)^2+\cdots+(\sqrt{a_{k-1}}x_{k-1}+\sqrt{1-a_k}x_k)^2+(\sqrt{1-a_{n-k+1}}x_k+\sqrt{a_{n-k}}x_{k+1})^2+\cdots+(\sqrt{1-a_2}x_{n-1}+\sqrt{a_1}x_n)^2+[1-(1-a_k)-(1-a_{n+1-k})]x_k^2$. (1)

由于 x_ix_{i+1} 项的系数为 1，所以 $a_1=1$，$2\sqrt{a_i}\sqrt{1-a_{i+1}}=1$，



即 $a_1=1, a_{i+1}=1-\frac{1}{4a_i}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$. (2)

由(2)可得

$$a_i=\frac{i+1}{2i}\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

$$1-a_i=\frac{i-1}{2i}\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

因此,由(1)、(3)、(4)可得 $[1-(1-a_k)-(1-a_{n+1-k})]x_k^2\leqslant 1$.

解得 $x_k\leqslant\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$ $(k=1,2,\cdots,n)$. (5)

由(1)知,(5)等号成立,当且仅当 $\sqrt{a_1}x_1+\sqrt{1-a_2}x_2=\sqrt{a_2}x_2+\sqrt{1-a_3}x_3=\cdots=$

$\sqrt{a_{k-1}}x_{k-1}+\sqrt{1-a_k}x_k=\sqrt{1-a_{n-k+1}}x_k+\sqrt{a_{n-k}}x_{k+1}=\cdots=\sqrt{1-a_2}x_{n-1}+\sqrt{a_1}x_n=0$

上面关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程等价于

$x_i=x_k\cdot(-1)^{i-k}\frac{i}{k}$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$,

$x_j=x_k\cdot(-1)^{j-k}\frac{n+1-j}{n+1-k}$ $(j=k+1,k+2,\cdots,n)$.

综上述可知 $x_{k\ \max}=\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$.

(Ⅲ)用判别式法求函数的值域

例5 求下列函数的值域:

(1)$y=-\frac{x^2-x+2}{x^2+2}$;(2)$y=x-\sqrt{1-x^2}$.

解 (1)由已知可得 $(y+1)x^2-x+2y+2=0$.

将上式视为 x 的一元二次方程,由方程有实数根,得

$1-4(y+1)(2y+2)\geqslant 0$.

解之,得 $-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant -1+\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以函数的值域为 $\left[-1-\frac{\sqrt{2}}{4},-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

(2)由已知可得 $y-x=-\sqrt{1-x^2}$,

两边平方,得 $2x^2-2yx+y^2-1=0$.

由 $\Delta=4y^2-8(y^2-1)\geqslant 0$,

解得 $-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$



由于 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $y=x-\sqrt{1-x^2}\leqslant x\leqslant 1$.

易知 $x=1$ 时，$y=1$，$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y=-\sqrt{2}$.

故函数 $y=x-\sqrt{1-x^2}$ 的值域为 $[-\sqrt{2},1]$.

点评 (1)对于下面的类型函数

$y=\frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$ 与 $y=Ax+B+C\sqrt{ax^2+bx+c}$ 都可以考虑使用判别式法，它们都可以化为 $f(y)x^2+g(y)x+h(y)=0$，

然后再利用判别式

$g^2(y)-4f(y)h(y)\geqslant 0$ (*)

求解.

(2)由于判别式是对二次方程而言，似乎要对 $f(y)$ 是否为零进行讨论，但是 $f(y)=0$ 已包含在(*)中，故不必讨论.

(3)当函数的定义域不是全体实数时，我们还要看函数是否取到最大值与最小值，如本题的第(2)小题，我们还要去验算一下，是否存在实数 x，使函数取到这个最值.

例6 已知函数 $f(x)=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}(b<0)$ 的值域为[1,3].

(1)求实数 b、c 的值；

(2)判断 $F(x)=\lg f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的单调性，并给出证明；

(3)若 $t\in\mathbf{R}$，求证：$\lg\frac{7}{5}\leqslant F\left(\left|t+\frac{1}{6}\right|-\left|t-\frac{1}{6}\right|\right)\leqslant\lg\frac{13}{5}$.

分析 易见，我们应先用判别式法求出 b、c 的值，然后再解决第(2)、(3)小题.

解 (1)显然，$f(x)$ 的定义域为全体实数.

由 $y=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}(b<0)$，

得 $(y-2)x^2-bx+y-c=0$，

$\Delta=b^2-4(y-2)(y-c)\geqslant 0$，

得 $y^2-(2+c)y+2c-\frac{b^2}{4}\leqslant 0$. ①

从而，它的解集应为[1,3]，故1,3是①对应方程的根.

由韦达定理易求得 $b=-2$，$c=2$.

(2)因为 $f(x)=\frac{2x^2-2x+2}{x^2+1}=2-\frac{2x}{x^2+1}$，

设 $x_1,x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，



$$\frac{f(x_2)}{2}-\frac{f(x_1)}{2}=\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}>0.$$

所以函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为增函数，从而 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增.

(3) 令 $h=\left|t-\frac{1}{6}\right|-\left|t+\frac{1}{6}\right|$,

易知 $-\frac{1}{3}\leqslant h\leqslant\frac{1}{3}$,

所以 $\frac{7}{5}\leqslant f(h)\leqslant\frac{13}{5}$.

故 $\lg\frac{7}{5}\leqslant F\left(\left|t-\frac{1}{6}\right|-\left|t+\frac{1}{6}\right|\right)\leqslant\lg\frac{13}{5}$.

(Ⅳ) 用换元法求函数的值域

例7 设 $1<x<\frac{9}{2}$，求函数 $y=\left[1+\frac{1}{\lg(\sqrt{x^2+10}+x)}\right]\left[1+\frac{2}{\lg(\sqrt{x^2+10}-x)}\right]$ 的值域.

分析 注意到 $\lg(\sqrt{x^2+10}+x)+\lg(\sqrt{x^2+10}-x)=1$，故可考虑变量代换 $t=\lg(\sqrt{x^2+10}+x)$.

解 令 $t=\lg(\sqrt{x^2+10}+x)$.

所以 $\frac{1}{2}<t<1$

更进一步，令 $t=\cos^2\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

所以
$$\begin{aligned}y&=\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{2}{1-t}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{\sin^2\alpha}\right)\\&=(2+\tan^2\alpha)(3+2\cot^2\alpha)\\&=8+3\tan^2\alpha+4\cot^2\alpha.\end{aligned}$$

再次设 $T=\tan^2\alpha, 0<T<1$.

所以 $y=8+3T+\frac{4}{T}$,

又 $y'=3-\frac{4}{T^2}<0$.

函数 y 是 T 的减函数，所以函数的值域为 $(15,+\infty)$.

例8 在约束条件 $x\geqslant0, y\geqslant0$ 及 $3\leqslant x+y\leqslant$ [illegible] 下，求函数 $u=x^2-xy+y^2$ 的最大值和最小值



解 令 $x=a\sin^2\theta, y=a\cos^2\theta, \theta\in[0,2\pi)$，则 $3\leqslant a\leqslant 5$，于是

$$u=a^2\sin^4\theta-a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+a^2\cos^4\theta$$
$$=a^2[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta]$$
$$=a^2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta\right).$$

从而 $\frac{9}{4}\leqslant u\leqslant 25$，所以 $u_{\min}=\frac{9}{4}, u_{\max}=25$.

这里 $\frac{9}{4}$ 和 25 都是能取到的.

例 9 求函数 $y=2x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

解 因为 $x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

所以作代换 $\sqrt{x^2-3x+2}=\left|x-\frac{3}{2}\right|-t\ \left(0<t\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

则 $\left|x-\frac{3}{2}\right|=\frac{1+4t^2}{8t}, 0<t\leqslant\frac{1}{2}$.

所以 $y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)+3+\left(\left|x-\frac{3}{2}\right|-t\right)$.

当 $x\geqslant 2$ 时，

$$y=3\left(x-\frac{3}{2}\right)-t+3=3\cdot\frac{1+4t^2}{8t}-t+3$$
$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\frac{3}{4}}{t}\right)+3\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times 2\right)+3$$
$$=4\left(t=\frac{1}{2}\text{ 取等号}\right)$$

当 $x\leqslant 1$ 时，

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)-t+3=-\frac{1+4t^2}{8t}-t+3$$
$$=-\left(\frac{1}{8t}+\frac{3}{2}t\right)+3$$
$$\leqslant-2\sqrt{\frac{1}{8t}\cdot\frac{3t}{2}}+3=3-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{时取等号}\right).$$

故所求函数的值域为 $\left(-\infty, 3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup[4,+\infty)$.

评注 读者可尝试使用判别式法，并结合根的分布来解此题.



例 10　设 x、y、z 是 3 个不全为零的实数，求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

解　引入两个参数 α、β，且 α、β 均为正数，则有

$\alpha^2x^2+y^2\geqslant 2\alpha xy$，$\beta^2y^2+z^2\geqslant 2\beta yz$，

所以 $xy\leqslant\dfrac{\alpha}{2}x^2+\dfrac{y^2}{2\alpha}$，$2yz\leqslant\beta y^2+\dfrac{z^2}{\beta}$，

因此 $xy+2yz\leqslant\dfrac{\alpha}{2}x^2+\left(\dfrac{1}{2\alpha}+\beta\right)y^2+\dfrac{1}{\beta}z^2$.

令 $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2\alpha}+\beta=\dfrac{1}{\beta}$，解得 $\alpha=\sqrt{5}$，$\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 故

$xy+2yz\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x^2+y^2+z^2)$，

所以 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2}x^2=\dfrac{1}{2\alpha}y^2,\\ \beta y^2=\dfrac{1}{\beta}z^2.\end{cases}$

可得一组解 $(x,y,z)=(1,\sqrt{5},2)$，即当 $x=1$，$y=\sqrt{5}$，$z=2$ 时，$\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 取到 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，从而它的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

（Ⅴ）利用不等式求函数的值域（最值）

例 11　求下面函数的值域：

(1) $y=\sin x\cos^2x\quad(0<x<\pi)$；

(2) $y=\sin^2x+\dfrac{4}{\sin^2x}$

解　(1) 因为 $y^2=\sin^2x\cos^4x$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}(2\sin^2x\cdot\cos^2x\cdot\cos^2x)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2x+\cos^2x+\cos^2x}{3}\right)^3\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{27}=\frac{4}{27}.\end{aligned}$$

所以 $y\in\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right]$



(2)$y=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x}$

$$\geqslant 2+\frac{3}{\sin^2 x}=5,$$

所以 y 的值域为$[5,+\infty)$.

例 12 已知两两互异的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,求函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|$ 的最小值.

解 不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,利用不等式$|a|\geqslant a$ 有

(1)当 $n=2m(m\in\mathbf{N})$时,

$$f(x)=(|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_m|)+(|x-a_{m+1}|+|x-a_{m+2}|+\cdots+|x-a_{2m}|)\geqslant(x-a_1)+(x-a_2)+\cdots+(x-a_m)+(a_{m+1}-x)+(a_{m+2}-x)+\cdots+(a_{2m}-x)=(a_{m+1}+\cdots+a_{2m})-(a_1+a_2+\cdots+a_m).$$

当且仅当 $a_m\leqslant x\leqslant a_{m+1}$时等号成立.

(2)当 $n=2m+1$ 时,

$$f(x)=|x-a_{m+1}|+\sum_{i=1}^{m}|x-a_i|+\sum_{i=m+2}^{2m+1}|a_i-x|$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{m}|x-a_i|+\sum_{i=m+2}^{2m+1}|a_i-x|$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{m}(x-a_i)+\sum_{i=m+2}^{2m+1}(a_i-x)$$

$$=\sum_{i=m+2}^{2m+1}a_i-\sum_{i=1}^{m}a_i.$$

当且仅当 $x=a_{m+1}$时等号成立.

例 13 一块矩形铁片长为 a,宽为 b,从它的四个角各剪去一个边长为 x 的小正方形,把剩下的铁片做成一个没有盖子的盒子,当 $a\geqslant b$ 时,求 x 是多少时,盒子的容积最大?

解 设盒子的容积为 $V(x)$,依题意不难得出:

$$V(x)=x(a-2x)(b-2x),0<x<\frac{b}{2}.$$

引入正参数 λ,使

$$V(x)=\frac{1}{\lambda(2\lambda+2)}[(2\lambda+2)x](\lambda a-2\lambda x)(b-2x).$$

因为正数$(2\lambda+2)x$,$\lambda a-2\lambda x$,$b-2x$ 的和为常数,因此,当且仅当

$$(2\lambda+2)x=\lambda a-2\lambda x=b-2x \qquad (*)$$

时,V 有最大值

由$(*)$式得 $x=\frac{\lambda a}{4\lambda+2}=\frac{b}{2\lambda+4}$,



消去x,得 $a\lambda^2+2(a-b)\lambda-b=0$,

求得其正根为$\lambda=\dfrac{b-a+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a}$.

进而求得最大值点

$$x=\frac{b}{2\lambda+4}=\frac{1}{6}\left(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)$$

(Ⅵ)利用单调性求函数的值域(最值)

例14 求函数 $f(x)=\dfrac{|x-a|}{x^2-ax+1}$ $(|a|<2)$的最值.

解 令$t=x-a$,所以 $f(x)=\dfrac{|t|}{x(x-a)+1}=\dfrac{|t|}{t^2+1+at}$.

因为 $t^2+1+at\geqslant 2|t|+at\geqslant(2-|a|)|t|\geqslant 0$,

所以 $f(x)\geqslant 0$,当$x=a$时取等号.

故 $f_{min}(x)=0$.

当$t\neq 0$时,则

$$f(x)=\frac{1}{|t|+\frac{1}{|t|}+a\frac{t}{|t|}}\leqslant\frac{1}{2+a\frac{t}{|t|}},$$

所以,当$x>a$时,$f_{max}(x)=\dfrac{1}{2+a}$.

当$x<a$时,$f_{max}(x)=\dfrac{1}{2-a}$.

所以,$f_{max}(x)=\max\left\{\dfrac{1}{2+a},\dfrac{1}{2-a}\right\}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2+a} & (-2<a<0),\\[2mm] \dfrac{1}{2-a} & (0\leqslant a<2)\end{cases}$$

例15 已知$a,b\in\mathbf{R}^+$,$a+b=s$(定值),求$y=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$的最小值

解 因为 $y=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=ab+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

$$=ab+\frac{1}{ab}+\frac{a^2+b^2}{ab}=ab+\frac{1}{ab}+\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}$$

$$=ab+\frac{s^2+1}{ab}-2,$$

令$x=ab$,则$0<x\leqslant\dfrac{s^2}{4}$.



所以 $y=x+\frac{s^2+1}{x}-2\quad(0<x\leqslant\frac{s^2}{4})$，

而 $y'=1-\frac{s^2+1}{x^2}$，

所以函数 $y=x+\frac{s^2+1}{x}-2$ 在 $(0,\sqrt{s^2+1}]$ 上单调递减，在 $[\sqrt{s^2+1},+\infty)$ 上单调递增

又 $x\leqslant\frac{s^2}{4}$，分两种情况讨论如下：

(1) 当 $\frac{s^2}{4}\leqslant\sqrt{s^2+1}$，即 $s\leqslant2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 时，函数 $y=x+\frac{s^2+1}{x}-2$ 在 $x=\frac{s^2}{4}$ 时取最小值 $2+\frac{4}{s^2}+\frac{s^2}{4}$；

(2) 当 $\frac{s^2}{4}\geqslant\sqrt{s^2+1}$，即 $s\geqslant2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 时，函数 $y=x+\frac{s^2+1}{x}-2$ 在 $x=\sqrt{s^2+1}$ 时，取最小值 $2(\sqrt{s^2+1}-1)$。

例 16 设非负实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$，试求函数 $f(a,b,c)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ 的最小值。

解 函数 f 可变形为 $f=\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{1+c^2}+\frac{2c}{1+c^2}$。

不妨设 $c\leqslant a,b$，则由题设条件等式易得 $0\leqslant c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$。

又因为 $ab+bc+ac=1$，

所以 $c(a+b)=1-ab\geqslant1-\frac{1}{4}(a+b)^2$，

即 $(a+b)^2+4c(a+b)-4\geqslant0$。

故有 $a+b\geqslant2(\sqrt{1+c^2}-c)$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号。

我们可以证明：当 $|c|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，

$$2(\sqrt{1+c^2}-c)\geqslant\sqrt{1+c^2}\qquad(*)$$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+c^2}\geqslant2c\Leftrightarrow3c^2\leqslant1$。

故 $(*)$ 是成立的



这样，我们令 $x=a+b$，则 $x\geqslant\sqrt{1+c^2}$.
考虑函数

$$g(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{1+c^2}$$

因为 $g'(x)=\frac{1}{1+c^2}-\frac{1}{x^2}\geqslant 0$.

所以 $g(x)$ 为 $[\sqrt{1+c^2},+\infty)$ 上的增函数.
于是，有

$$\begin{aligned}
f&=g(x)+\frac{2c}{1+c^2}\\
&\geqslant g[2(\sqrt{1+c^2}-c)]+\frac{2c}{1+c^2}\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt{1+c^2}+c)+\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+c^2}+\frac{7+3c^2}{\sqrt{1+c^2}}\right)+\frac{1}{2}(c-3\sqrt{1+c^2})\\
&\geqslant 4-\frac{1}{2}(3\sqrt{1+c^2}-c)\\
&=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}[(3+c)-3\sqrt{1+c^2}]\\
&=\frac{5}{2}+\frac{4c\left(\frac{3}{4}-c\right)}{3+c+3\sqrt{1+c^2}}
\end{aligned}$$

因为 $\frac{3}{4}-c>\frac{\sqrt{3}}{3}-c\geqslant 0, c\geqslant 0$.

所以 $f\geqslant\frac{5}{2}$，当且仅当 $a=b, c=0$.

即 $a=b=1, c=0$ 时，f 取到 $\frac{5}{2}$，故 $f_{\min}=\frac{5}{2}$.

 思考交流

思考题 1 证明 不存在函数 $f: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使得对任意 $x, y\in\mathbf{R}^+$，均有

$$f(x)-f(x+y)\geqslant\frac{f(x)\cdot y}{f(x)+y}. \quad ①$$



证明 设存在满足条件的函数 f，由条件①，可知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^+$ 的单调减函数，这促使我们思考 $f(x)$ 会变为负数吗？

为此，我们首先证明：对任意 $x\in\mathbf{R}^+$，均有

$$f(x)-f(x+1)\geqslant\frac{1}{2}$$

事实上，对任意 $x\in\mathbf{R}^+$，取 $n\in\mathbf{N}^*$，使 $nf(x+1)\geqslant1$，则对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，均有

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)\geqslant\frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}}$$

利用 f 的单调性，$f\left(x+\frac{k}{n}\right)\geqslant f(x+1)\geqslant\frac{1}{n}$，结合上式，有

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)\geqslant\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{nf\left(x+\frac{k}{n}\right)}}\geqslant\frac{\frac{1}{n}}{1+1}=\frac{1}{2n},$$

这里 $k=0,1,2,\cdots,n-1$。

上述几个式子相加，就有 $f(x)-f(x+1)\geqslant\frac{1}{2}$。

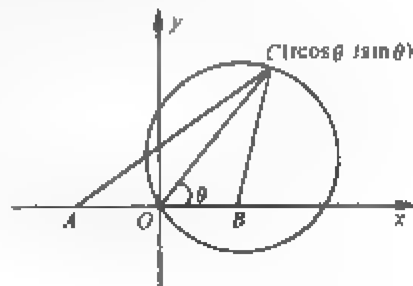
对任意 $x\in\mathbf{R}^+$，取 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $f(x)<\frac{m}{2}$，就有

$$\begin{aligned}f(x)-f(x+m)&=\sum_{i=0}^{m-1}\left(f(x+i)-f(x+i+1)\right)\\&\geqslant\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{2}=\frac{m}{2}>f(x).\end{aligned}$$

这导致 $f(x+m)<0$ 与 f 为 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^+$ 上的函数矛盾，故原命题得证。

思考题 2 已知 $x^2+y^2=4x+6y$，求 $M=\sqrt{8x+6y+4}+\sqrt{6y+4}$ 的最大值。

解 首先，如果想消去 y 而得到关于 x 的函数，利用求导数求最大值是行不通的，不仅在消 y 时有符号的问题，并且会在函数的表达式中有两重根式。从而，我们还是将原问题转化为一个几何问题。我们将条件化为



$$(x-2)^2+(y-3)^2=13.\qquad(1)$$

而把 $M=\sqrt{8x+6y+4}+\sqrt{6y+4}$ 化为

$$M=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$



故原问题转化为在圆上求一点 C，使得 $|CA|+|CB|$ 最大.

为方便，我们设 $|CA|=a$，$|CB|=b$，$|CO|=t$，OC 为终边的角为 θ，故 C 点的坐标为 $C(t\cos\theta,t\sin\theta)$，又点 C 在圆上，将其代入圆方程易得

$t=4\cos\theta+6\sin\theta.$ (2)

在 $\triangle AOC$ 中，由余弦定理得

$a^2=4+t^2+4t\cos\theta.$ (3)

同理，由 $\triangle OBC$ 得

$b^2=4+t^2-4t\cos\theta.$ (4)

由于过 $O(0,0)$ 处圆的切线方程为 $2x+3y=0$，故 $\theta\in\left(-\arctan\frac{2}{3},\pi-\arctan\frac{2}{3}\right)$.

我们现在来求 $(a+b)$ 的最大值. 为此，我们引进待定系数 $\lambda>0$，因为

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$=a^2+b^2+\frac{1}{\lambda}2a(\lambda b)$$

$$\leqslant a^2+b^2+\frac{1}{\lambda}(a^2+\lambda^2b^2)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)a^2+(1+\lambda)b^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)(4+t^2+4t\cos\theta)+(1+\lambda)(4+t^2-4t\cos\theta)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)[4+16\cos^2\theta+36\sin^2\theta+48\sin\theta\cos\theta+4\cos\theta(4\cos\theta+6\sin\theta)]$$
$$+(1+\lambda)[4+16\cos^2\theta+36\sin^2\theta+48\sin\theta\cos\theta-4\cos\theta(4\cos\theta+6\sin\theta)]$$

$$=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)(4+32\cos^2\theta+36\sin^2\theta+72\sin\theta\cos\theta)+(1+\lambda)(4+36\sin^2\theta+24\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)[4+16(1+\cos2\theta)+18(1-\cos2\theta)+36\sin2\theta]+(1+\lambda)[4+18(1-\cos2\theta)$$
$$+12\sin2\theta]$$

$$=60+\frac{38}{\lambda}+22\lambda+\left(48+\frac{36}{\lambda}+12\lambda\right)\sin2\theta-\left(20+\frac{2}{\lambda}+18\lambda\right)\cos2\theta$$

$$=60+\frac{38}{\lambda}+22\lambda+\sqrt{\left(48+\frac{36}{\lambda}+12\lambda\right)^2+\left(20+\frac{2}{\lambda}+18\lambda\right)^2}\sin(2\theta-\alpha)$$

$$\leqslant60+\frac{38}{\lambda}+22\lambda+\sqrt{\left(48+\frac{36}{\lambda}+12\lambda\right)^2+\left(20+\frac{2}{\lambda}+18\lambda\right)^2}$$

$$=60+\frac{38}{\lambda}+22\lambda+\sqrt{\frac{144}{\lambda^2}(\lambda^2+4\lambda+3)^2+\frac{4}{\lambda^2}(9\lambda^2+10\lambda+1)^2}$$



$$=60+\frac{38}{\lambda}+22\lambda+\sqrt{\frac{144}{\lambda^2}(\lambda+1)^2(\lambda+3)^2+\frac{4}{\lambda^2}(\lambda+1)^2(9\lambda+1)^2}$$

$$=60+\frac{38}{\lambda}+22\lambda+\frac{2(\lambda+1)}{\lambda}\sqrt{117\lambda^2+234\lambda+325}.$$

这里 λ 为待定系数，α 满足 $\tan\alpha=\dfrac{20+\dfrac{2}{\lambda}+18\lambda}{48+\dfrac{36}{\lambda}+12\lambda}=\dfrac{9\lambda^2+10\lambda+1}{6\lambda^2+24\lambda+18}=\dfrac{9\lambda+1}{6(\lambda+3)}$，显然，上面取最大值时，应该有

$$a=\lambda b, \tag{5}$$

且 $2\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. (6)

因为 $2\theta\in\left(-2\arctan\dfrac{2}{3},2\pi-2\arctan\dfrac{2}{3}\right)$，故会存在 θ，使得(6)成立. 由(6)得

$$\tan 2\theta=-\cot\alpha=-\frac{6(\lambda+3)}{9\lambda+1}. \tag{7}$$

令 $u=\tan\theta$，$\tan 2\theta=\dfrac{2u}{1-u^2}$，由(7)得

$$\lambda=-\frac{9u^2-u-9}{3u^2-9u-3} \tag{8}$$

由(5) $a^2=\lambda^2b^2$ 得

$32\cos^2\theta+36\sin^2\theta+72\sin\theta\cos\theta+4=\lambda^2(4+36\sin^2\theta+24\sin\theta\cos\theta)$,

即 $9\cos^2\theta+10\sin^2\theta+18\sin\theta\cos\theta=\lambda^2(\cos^2\theta+10\sin^2\theta+6\sin\theta\cos\theta)$,

亦即 $10\tan^2\theta+18\tan\theta+9=\lambda^2(10\tan^2\theta+6\tan\theta+1)$.

所以 $\lambda^2=\dfrac{10u^2+18u+9}{10u^2+6u+1}$. (9)

将(8)代入(9)

$$\frac{10u^2+18u+9}{10u^2+6u+1}=\frac{81u^4-18u^3-161u^2+18u+81}{9u^4-54u^3+63u^2+54u+9}$$

$\Leftrightarrow(10u^2+18u+9)(9u^4-54u^3+63u^2+54u+9)$

$=(10u^2+6u+1)(81u^4-18u^3-161u^2+18u+81)$

$\Leftrightarrow 90u^6-378u^5-261u^4+1188u^3+1629u^2+648u+81$

$=810u^6+306u^5-1637u^4-804u^3+757u^2+504u+81$

$\Leftrightarrow 4u(180u^5+171u^4-344u^3-498u^2-218u-36)=0$

$\Leftrightarrow(3u+2)(60u^4+17u^3-126u^2-82u-18)=0$ (10)

由(8)中 $\lambda>0$，得 $u\in\left(\dfrac{1-\sqrt{425}}{18},\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{425}}{18},\dfrac{3+\sqrt{13}}{3}\right)$.



即 $u\in(-1.08975\cdots,-0.30277\cdots)\cup(1.20086\cdots,2.20185\cdots)$ $(*)$

$u=-\frac{2}{3}$ 时，$\tan\theta=-\frac{2}{3}$，为过原点的圆的切线斜率，与 θ 的所属范围不符，舍去。故 u 为下述方程的根：

$$60u^4+17u^3-126u^2-82u-18=0, \tag{11}$$

$$u^4+\frac{17}{60}u^3-\frac{21}{10}u^2-\frac{41}{30}u-\frac{3}{10}=0. \tag{12}$$

令 $a=\frac{17}{60}, b=-\frac{21}{10}, c=-\frac{41}{30}, d=-\frac{3}{10}$.

由费拉利(L. Ferrari)方法和卡当(H. Cardano)公式知

设 $p=\frac{3ac-12d-b^2}{3}, q=\frac{2b^3+9abc-36bd-27a^2d+108bd-27c^2}{27}$.

则(12)可分解为：

$$\left[u^2+\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\right)u+\frac{t_0}{2}+\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right]\left[u^2+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\right)u+\frac{t_0}{2}-\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right]=0,$$

其中 $t_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$

于是我们可得方程(12)的两个不同的实数解：

$u_1=1.61391\cdots, u_2=-1.24408\cdots$

u_2 不在 $(*)$ 的范围内，故(12)只有唯一满足要求的实数根 u_1，此时我们可求得对应的 $\lambda=1.32101\cdots$，$\theta=58.21710\cdots$(度)

故 $a+b\leqslant\sqrt{60+\frac{38}{\lambda}+22\lambda+\frac{2(\lambda+1)}{\lambda}\sqrt{117\lambda^2+234\lambda+325}}$

$=14.81787\cdots$

这就是 M 的最大值.

同步检测3

1. 函数 $f(x)=x^2-2ax+a$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有最小值，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上一定 ……………………………………………… (　　)

A. 有最小值　　B. 有最大值　　C. 是减函数　　D. 是增函数

2. 已知函数 $f(x)=3-2|x|$，$g(x)=x^2-2x$，构造函数 $F(x)$ 如下：当 $f(x)\geqslant g(x)$



时，$F(x)=g(x)$，当 $f(x)<g(x)$ 时，$F(x)=f(x)$，那么 $F(x)$ …………（　）

A. 有最大值 3，最小值 -1　　B. 有最大值 $7-2\sqrt{7}$，无最小值

C. 有最大值 3，无最小值　　D. 无最小值，也无最大值

3. 给定实数 x，定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数，则下列结论不正确的是（　）

A. $x-[x]\geq 0$　　B. $x-[x]<1$

C. $x-[x]$ 是周期函数　　D. $x-[x]$ 是偶函数

4. 若 $x\in \mathbf{R}$，$n\in \mathbf{N}$，定义 $M_x^n=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$，例如 $M_{-4}^3=(-4)(-3)(-2)=-24$，则函数 $f(x)=M_{x-3}^7\sin x$ 的奇偶性 …………（　）

A. 是偶函数不是奇函数　　B. 是奇函数不是偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 既不是奇函数也不是偶函数

5. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2e}(e^x+e^{-x})(x<1)$（其中 e 为大于 1 的常数），则（　）

A. $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)<f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$　　B. $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)>f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

C. $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)<f^{-1}(2)$　　D. $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)>f^{-1}(2)$

6. 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$、$g(x)$ 都有反函数，且函数 $f(x-1)$ 和 $g^{-1}(x-2)$ 图象关于直线 $y=x$ 对称，若 $g(5)=2005$，则 $f(4)$ 为 ……………………（　）

A. 2004　　B. 2005　　C. 2006　　D. 2007

7. 已知 x 为正实数，设 $u=x+\frac{1}{x}$，则 $u+\frac{1}{u}$ 的最小值为______.

8. 已知不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$，设二次函数 $y=ax^2+bx+2$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 的最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N=$______.

9. 已知函数 $y=3+x\sqrt{x^4-x^2+1}\cdot\cos x$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值分别为 M 与 N，则 $M+N=$______.

10. 设函数 $f(x)=|x-a|$，$g(x)=ax$，$(a>0)$.

(1) 解关于 x 的不等式 $|x-a|<ax$；

(2) 记 $F(x)=f(x)-g(x)$，若 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，求 a 的范围.

11. 已知函数 $f(x)=\log_3\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,2]$，求 m，n 的值.

12. 设函数 $f(x)=\lg\frac{bx^2+ax+b}{x^2+x+1}$，已知 $a>b$，函数的值域为 $(-\infty,0]$，求 a 的取值范围.



13. 已知实数 x,y 满足 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，求 $u=x^2+xy+y^2$ 的最大值与最小值

14. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $xyz(x+y+z)=1$，求 $(x+y)(y+z)$ 的最小值.

15. 已知函数 $y=\dfrac{2+x}{\sqrt{1-x^2}+1}+\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$，$x\in[-1,0)\cup(0,1]$，求此函数的最大值与最小值.

16. 设 $a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$，$c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$，记 $M=\max\{a,b,c\}$，求 M 的最小值.

17. 设 $f(x)=x^2+px+q(p,q\in\mathbf{R})$，若 $|f(x)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 M，求 M 的最小值

18. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个实根为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$

(1) 若 x_1,x_2 为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的两个不同的点，求证 $4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4<0$，

(2) 设 $f(x)=\dfrac{4x-t}{x^2+1}$，$f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值和最小值分别记为 $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$，$g(t)=f_{\max}-f_{\min}$，求 $g(t)$ 的最小值

19. 设 n 是给定的自然数，$n\geqslant 3$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，求 $\max(\min_{i<j}(|a_i-a_j|))$.



第四讲　二次函数与三次函数

知识点金

1. 常见二次函数的解析式

(1)一般式：$f(x)=ax^2+bx+c$；

(2)顶点式：$f(x)=a(x-k)^2+m$；

(3)交点式(根积式)：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$；

(4)三点式：$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$，其中函数图象过三已知点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$C(x_3,f(x_3))$。

2. 根的分布

对 $ax^2+bx+c=0(a>0,\Delta=b^2-4ac\geq0)$ 的实根分布问题的结论，设 x_1,x_2 为 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根，则

	充要条件	$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象
$x_1\leq x_2<k$	$\begin{cases}\Delta\geq0\\-\frac{b}{2a}<k\\f(k)>0\end{cases}$	



	充要条件	$y=ax^2+bx+c(a>0)$的图象
$k<x_1<x_2$	$\begin{cases}\Delta>0\\-\frac{b}{2a}>k\\f(k)>0\end{cases}$	
$x_1<k<x_2$	$f(k)<0$	
$k_1<x_1<x_2<k_2$	$\begin{cases}\Delta>0\\k_1<-\frac{b}{2a}<k_2\\f(k_1)>0\\f(k_2)>0\end{cases}$	
$x_1<k_1$ 且 $x_2>k_2$ $(k_1<k_2)$	$\begin{cases}f(k_1)<0\\f(k_2)<0\end{cases}$	
$x_1\in(k_1,k_2)$或 $x_2\in(k_1,k_2)$	$f(k_1)f(k_2)<0$	



3. 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$x\in[m,n]$时的最值情况.

	$-\frac{b}{2a}\in[m,n]$	$-\frac{b}{2a}\notin[m,n]$
$a>0$	$f_{min}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$ $f_{max}=\max\{f(m),f(n)\}$	$f_{max}=\max\{f(m),f(n)\}$ $f_{min}=\min\{f(m),f(n)\}$
$a<0$	$f_{max}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$ $f_{min}=\min\{f(m),f(n)\}$	

4. 二次方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq0)$在$[s,t]$上仅有一个实根与有两个实根的讨论.

(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在(s,t)里有且仅有一实数根的充要条件是

$$f(s)f(t)<0，或\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0,\\-\frac{b}{2a}\in(s,t),\end{cases}或\begin{cases}f(s)=0,\\-\frac{b}{a}\in(2s,s+t),\end{cases}或\begin{cases}f(t)=0,\\\frac{b}{a}\in(s+t,2t)\end{cases}$$

(2)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在$[s,t)$里有且仅有一实数根的充要条件是：

$$f(s)f(t)<0，或\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0,\\-\frac{b}{2a}\in[s,t),\end{cases}或\begin{cases}f(s)=0,\\-\frac{b}{a}\in[s+t,+\infty)\cup(-\infty,2s),\end{cases}$$

$$或\begin{cases}f(t)=0,\\-\frac{b}{a}\in[s+t,2t)\end{cases}$$

(3)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在$(s,t]$里有且仅有一实数根的充要条件是：

$$f(s)f(t)<0，或\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0,\\-\frac{b}{2a}\in(s,t],\end{cases}或\begin{cases}f(s)=0,\\-\frac{b}{a}\in(2s,s+t],\end{cases}$$

$$或\begin{cases}f(t)=0,\\-\frac{b}{a}\in(-\infty,s+t]\cup[2t,+\infty)\end{cases}$$

(4)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在$[s,t]$里有且仅有一实数根的充要条件是：



$f(s)f(t)<0$，或$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0,\\ -\dfrac{b}{2a}\in[s,t],\end{cases}$或$\begin{cases}f(s)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(-\infty,2s)\cup(s+t,+\infty),\end{cases}$

或$\begin{cases}f(t)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(-\infty,s+t)\cup(2t,+\infty).\end{cases}$

(5)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在(s,t)里有两个实数根的充要条件是：

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ af(s)>0,\\ af(t)>0,\\ s<-\dfrac{b}{2a}<t.\end{cases}$$

(6)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在$[s,t)$里有两个实数根的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ af(s)>0,\\ af(t)>0,\\ s<-\dfrac{b}{2a}<t,\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(s)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(2s,s+t).\end{cases}$$

(7)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在$(s,t]$里有两个实数根的充要条件是：

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ af(s)>0,\\ af(t)>0,\\ s<-\dfrac{b}{2a}<t,\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(t)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(s+t,2t).\end{cases}$$

(8)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在$[s,t]$里有两个实数根的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0,\\ af(s)>0,\\ af(t)>0,\\ s<-\dfrac{b}{2a}<t,\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(s)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(2s,s+t),\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(t)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(s+t,2t),\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(s)=0,\\ f(t)=0.\end{cases}$$

5. 三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有极值的充要条件是：



$b^2-3ac>0$.

6. 三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在实数区间上是单调函数的充要条件是 $b^2-3ac\leqslant 0$.

7. 三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$ 至少有一个实数根.

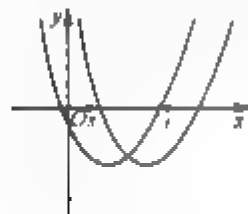


例题精析

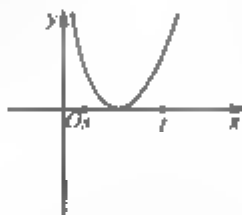
例1 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0)$，$\Delta=b^2-4ac$，则 $f(x)=0$ 在 (s,t) 里有且仅有一实数根的充要条件是：

$f(s)f(t)<0$，或 $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0,\\ -\dfrac{b}{2a}\in(s,t),\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(s)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(2s,s+t),\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(t)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(s+t,2t).\end{cases}$

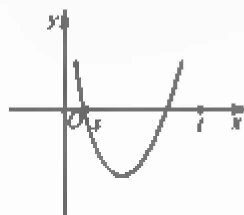
证明（必要性） 当 $a>0$ 时，如果 $f(x)$ 在 (s,t) 里有且仅有一根，则 $y=f(x)$ 的图象只能是如下四种情形



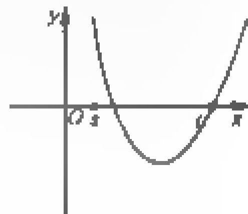
A



B



C



D

由 A、B 易得 $f(s)f(t)<0$，或 $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0,\\ -\dfrac{b}{2a}\in(s,t).\end{cases}$

对于 C，则 s 为 $f(x)=0$ 的根，所以 $f(s)=0$，设方程的另一根为 α，由韦达定理有 $s+\alpha=\dfrac{-b}{a}$，所以 $\alpha=-\left(s+\dfrac{b}{a}\right)$，由于 $\alpha\in(s,t)\Rightarrow-\dfrac{b}{a}\in(2s,s+t)$，于是

$\begin{cases}f(s)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(2s,s+t).\end{cases}$

对于 D，我们同样可得 $\begin{cases}f(t)=0,\\ -\dfrac{b}{a}\in(s+t,2t).\end{cases}$

当 $a<0$ 时，证明方法和上面一样，而充分性是不言自明的.



例2 设曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a$ 为正常数），与 $C_2:y^2=2(x+m)$ 在 x 轴的上方仅有一个公共点 P.

(1)求实数 m 的取值范围(用 a 表示)；

(2)O 为原点，若 C_1 与 x 轴的负半轴交于点 A，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，试求△OAP 的面积的最大值.

分析 (1)探求两曲线的交点，当然是考虑联立方程组的解，从而由

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+y^2=1, & (1)\\ y^2=2(x+m), & (2)\end{cases}$$

消去 y^2，得到

$$x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0. \quad (3)$$

是非常自然的．那么(3)的解的个数及解的情况当然不能对应于由(1)与(2)组成的方程组．一般说来，我们要在方程组中选一个简单的方程与(3)联立求解．对于本题而言，选(1)与选(2)的区别不是很大．下面我们给出分别选(1)与(2)的两种解答.

解法1

(1)由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+y^2=1, & (1)\\ y^2=2(x+m). & (2)\end{cases}$

消去 y^2 得

$$x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0. \quad (3)$$

设 $f(x)=x^2+2a^2x+2a^2m-a^2$.

问题(1)转化为方程(3)在 $x\in(-a,a)$ 上有唯一解或等根．考虑(1)

只须讨论以下三种情况：

①$\Delta=0$，得 $m=\frac{a^2+1}{2}$，此时 $x_p=-a^2$，当且仅当 $-a<-a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合；

②$f(a)f(-a)<0$，当且仅当 $-a<m<a$；

③$f(-a)=0$，得 $m=a$，此时 $x_p=a-2a^2$，当且仅当 $-a<a-2a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合.

$f(a)=0$，得 $m=-a$，此时 $x_p=-a-2a^2$.

由于 $-a-2a^2<-a$，从而 $m\neq-a$.

综上，可知当 $0<a<1$ 时，$m=\frac{a^2+1}{2}$ 或 $-a<m\leq a$.

当 $a\geq1$ 时，$-a<m<a$.



解法2 现考虑(3)与(2)在 x 轴的上方只能是如下三种情形

①(3)有两个根，一个根大于 $-m$，另一个根小于 $-m$.

因为 $f(-m)<0\Leftrightarrow m^2-a^2<0$.

所以 $-a<m<a$

②(3)有一个根恰为 $-m$，另一个根大于 $-m$，此时，有 $f(-m)=0\Rightarrow m=\pm a$ 又设另一根为 α，由韦达定理，此时有 $\alpha+(-m)=-2a^2$.

由 $\alpha>-m$，知 $m>a^2$，所以 $m=a$

显而易见，只有 $0<a<1$ 时，$m=a$.

③(3)有两个相等的根，且这个根大于 $-m$，此时

$$\begin{cases}\Delta=4a^4-4(2a^2m-a^2)=0,\\ -2a^2>-2m.\end{cases}$$

所以 $m=\dfrac{a^2+1}{2}$，且 $m>a^2$.

同样，要在 $0<a<1$ 之下，才有 $m=\dfrac{a^2+1}{2}$

综上所述：

当 $0<a<1$ 时，$m=\dfrac{a^2+1}{2}$ 或 $-a<m\leqslant a$

当 $a\geqslant1$ 时，$-a<m<a$.

(2)$\triangle OAP$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ay_p$.

因为 $0<a<\dfrac{1}{2}$，故当 $-a<m\leqslant a$ 时，

$0<-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}<a$.

由唯一性，得 $x_p=-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}$.

显然，当 $m=a$ 时，x_p 取值最小.

由于 $x_p>0$，从而 $y_p=\sqrt{1-\dfrac{x_p^2}{a^2}}$ 取值最大. 此时 $y_p=2\sqrt{a-a^2}$.

故 $S=a\sqrt{a-a^2}$.

当 $m=\dfrac{a^2+1}{2}$ 时，$x_p=-a^2$，$y_p=\sqrt{1-a^2}$.

此时 $S=\dfrac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$.

下面比较 $a\sqrt{a-a^2}$ 与 $\dfrac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$ 的大小.



令 $a\sqrt{a-a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，得 $a=\frac{1}{3}$.

故当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时，有

$a\sqrt{a(1-a)}\leqslant\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，

所以 $S_{\max}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$

当 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时，有

$a\sqrt{a(1-a)}>\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，

所以 $S_{\max}=a\sqrt{a-a^2}$.

例3 已知函数 $g(x)=3ax+2b$，$x\in[-1,1]$ 单调递增，且有最大值 2，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$x\in[-1,1]$ 图象的任一条切线都不会与双曲线 $y^2-x^2=1$ 的两支都相交，且 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(1)求证：$|g(x)|\leqslant 2$；

(2)求 $f(x)$ 的解析式；

(3)求 $f(x)$ 的最小值

解 依题意，有 $a>0$，$g(1)=3a+2b=2$，$f'(x)=3ax^2+2bx+c\in[-1,1]$.

(1)因为 $g(-1)=-3a+2b$，$f'(-1)=3a-2b+c$，$f'(0)=c$，所以 $|g(-1)|=|f'(0)-f'(-1)|\leqslant|f'(0)|+|f'(-1)|\leqslant 2$，从而，当 $x\in[-1,1]$ 时，有 $|g(x)|\leqslant 2$；

(2)由 $\begin{cases}-1\leqslant f'(0)\leqslant 1\\ -1\leqslant f'(1)\leqslant 1\\ 3a+2b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant c\leqslant 1\\ -1\leqslant 3a+2b+c\leqslant 1\\ 3a+2b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant c\leqslant 1\\ -3\leqslant c\leqslant -1\end{cases}\Rightarrow c=-1$，由此及 $f'(x)\in[-1,1]$ 知二次函数 $f'(x)$ 的对称轴是 y 轴，即 $b=0$，从而由 $3a+2b=2$ 得 $a=\frac{2}{3}$. 因此，$f(x)=\frac{2}{3}x^3-x+d$. 令 $f'(x)=2x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $[f(x)]_{\max}=\max\left\{f(-1),f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f(1)\right\}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}+d=\frac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow d=0$.

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x$；

(3) $[f(x)]_{\min}=\min\left\{f(-1),f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f(1)\right\}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$



例4 若定义在区间 D 上的函数 $y=f(x)$ 对于区间 D 上的任意两个值 x_1, x_2，总有不等式 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为区间 D 上的凸函数.

(1)证明：定义在 $\mathbf{R}$ 上的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 是凸函数；

(2)对于(1)中的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$，若 $|f(1)|\leqslant 1$，$|f(2)|\leqslant 2$，$|f(3)|\leqslant 3$，求 $|f(4)|$ 取得最大值时函数 $y=f(x)$ 的解析式；

(3)定义在 $\mathbf{R}$ 上的任意凸函数 $y=f(x)$，若 $p<m<n<q$，且 $p+q=m+n$，$p,q,m,n\in\mathbf{N}^*$，证明：$f(p)+f(q)\leqslant f(m)+f(n)$.

解 (1)证明：因为 $a<0$，所以有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=a\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c$$

$$\leqslant a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

因此，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$ 是凸函数.

(2)由 $\begin{cases}f(1)=a+b+c\\ f(2)=4a+2b+c\\ f(3)=9a+3b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}f(1)-f(2)+\frac{1}{2}f(3),\\ b=-\frac{5}{2}f(1)+4f(2)-\frac{3}{2}f(3),\\ c=3f(1)-3f(2)+f(3).\end{cases}$ 从而有

$f(4)=16a+4b+c=f(1)-3f(2)+3f(3)$.

故 $|f(4)|\leqslant|f(1)|+3|f(2)|+3|f(3)|\leqslant 1+3\times 2+3\times 3=16$.

因为 $a<0$，所以当且仅当

$$\begin{cases}f(1)=-1,\\ f(2)=2,a=-4,b=15,c=-12\\ f(3)=-3,\end{cases}$$

时，$|f(4)|$ 取得最大值 16. 此时，$f(x)=-4x^2+15x-12$.

(3)不妨设 $m=p+t(t\in\mathbf{N}^*)$. 因为 $p+q=m+n$，所以 $m-p=q-n=t$. 由定义知：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. 因此，有

$\frac{f(p)+f(p+2)}{2}\leqslant f(p+1)$，即 $f(p)-f(p+1)\leqslant f(p+1)-f(p+2)$.

同理，有 $f(p+1)-f(p+2)\leqslant f(p+2)-f(p+3)$，

$f(p+2)-f(p+3)\leqslant f(p+3)-f(p+4)$，

……

$f(p+k-2)-f(p+k-1)\leqslant f(p+k-1)-f(p+k)$，



累加求和，得

$f(p)-f(p+k-1)\leqslant f(p+1)-f(p+k)$，即

$f(p)+f(p+k)\leqslant f(p+1)+f(p+k-1)$

因此，有 $f(p)+f(p+k)\leqslant f(p+1)+f(p+k-1)\leqslant f(p+2)+f(p+k-2)$，所以 $f(p)+f(p+k)\leqslant f(p+i)+f(p+k-i)$。

令 $p+k=q$，得 $f(p)+f(q)\leqslant f(p+i)+f(q-i)=f(m)+f(n)$

例5 设关于 x 的方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两根为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，函数 $f(x)=\frac{4x-t}{x^2+1}$

(1)求 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 的值；

(2)证明：$f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数；

(3)对任意正数 x_1、x_2，求证 $\left|f\left(\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}\right)-f\left(\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}\right)\right|<2|\alpha-\beta|$

解 (1)依题意，有 $\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2+16}}{4}$，$\beta=\frac{t+\sqrt{t^2+16}}{4}$ 且 $\alpha+\beta=\frac{t}{2}$，$\alpha\beta=-1$，从而 $f(\alpha)=\frac{4\alpha-2(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\alpha\beta}=\frac{2}{\alpha}=-2\beta=-\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2+16})$。同理，有 $f(\beta)=-\frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2+16})$。

(2)当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 时，有 $f'(x)=\frac{-2(2x^2-tx-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x-\alpha)(x-\beta)}{(x^2+1)^2}\geqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数

(3)对任意正数 x_1、x_2，有 $\alpha<\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}$、$\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}<\beta$，由此及函数 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数得 $\left|f\left(\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}\right)-f\left(\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}\right)\right|<[f(x)]_{\max}-[f(x)]_{\min}=f(\beta)-f(\alpha)=2|\alpha-\beta|$。

例6 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x-1=0$ 对称，且当 $x\in[2,3]$ 时，$g(x)=2a\cdot(x-2)-4(x-2)^3$（$a$ 为实数）

(1)求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2)在 $a\in(2,6]$ 或 $(6,+\infty)$ 的情况下，分别讨论函数 $f(x)$ 的最大值，并指出 a 为何值时，$f(x)$ 图象的最高点恰好落在直线 $y=12$ 上。

解 (1)注意到 $g(x)$ 是定义在区间 $[2,3]$ 上的函数，因此，根据对称性，我们只能求出 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上的解析式，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的解析式，则可以根据函数的奇偶性去求

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$2\leqslant 2-x\leqslant 3$，由于 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x-1=0$ 对称，所以，$f(x)=g(2-x)=2a\cdot(2-x-2)-4(2-x-2)^3=4x^3-2ax$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$-1\leqslant -x\leqslant 0$，由 $f(x)$ 为偶函数，可知：



$f(x)=f(-x)=4(-x)^3-2a(-x)=-4x^3+2ax.$

所以，$f(x)=\begin{cases}4x^3-2ax & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ -4x^3+2ax & (0\leqslant x\leqslant 1).\end{cases}$

(2)因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值，必等于 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上的最大值．故只需考虑 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的情形，此时，$f(x)=-4x^3+2ax$．

对于这个三次函数，要求其最大值，比较容易想到的方法是：考虑其单调性．因此，我们不妨在区间$[0,1]$上任取 x_1，x_2，设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(-4x_1^3+2ax_1)-(-4x_2^3+2ax_2)$$
$$=2(x_2-x_1)(2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a)$$

如果 $a\in(6,+\infty)$，则 $2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上单调递增．所以，$f(x)$ 的最大值在 $x=1$ 时取得，$f(1)=2a-4$．

令 $f(1)=2a-4=12$ 可解得：$a=8$．

如果 $a\in(2,6]$，则 $2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a$ 的符号不能确定，为确定 $f(x)$ 的单调区间，可令 $2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a<0$．

由于 $x_1<x_2$，要使上式成立，只需 $2x_2^2+2x_2x_2+2x_2^2-a\leqslant 0$，即 $x_2\leqslant\sqrt{\frac{a}{6}}$，由此我们不难得知：

$f(x)$ 在区间$\left[0,\sqrt{\frac{a}{6}}\right]$上单调递增，在区间$\left[\sqrt{\frac{a}{6}},1\right]$上单调递减．(证明略)

所以，$f(x)$ 在区间$[-1,1]$上的最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$．

令 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}=12$，解之得：$a=3\sqrt[3]{18}>6$，与 $a\in(2,6]$矛盾．

综上可知：当 $a\in(2,6]$时，$f(x)$ 的最大值为 $f\left(\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$；当 $a\in(6,+\infty)$时，$f(x)$ 的最大值为 $f(\pm 1)=2a-4$．并且，当 $a=8$ 时，函数 $f(x)$ 的图象的最高点恰好落在直线 $y=12$ 上．

点评　(1)本题中，当 $a\in(2,6]$时，运用单调性去求 $f(x)$ 的最值显然较为复杂．其实，如果我们注意到 $f(x)=-4x^3+2ax=2x(a-2x^2)$，且 x，$a-2x^2$ 均非负，则可利用基本不等式得到下面较为简洁的解法：

$$f(x)=\sqrt{4x^2(a-2x^2)^2}=\sqrt{4x^2(a-2x^2)(a-2x^2)}$$
$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{4x^2+(a-2x^2)+(a-2x^2)}{3}\right)^3}=\frac{2a}{9}\sqrt{6a}.$$



当且仅当 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$ 时等号成立.

然而,这种解法并不适用于 $a\in(6,+\infty)$ 的情形.也就是说,利用单调性与基本不等式在处理函数的最值问题时各有所长,对于本题来说,并没有一种普适的方法,只能分而治之.

(2)奇偶性可以使得我们在研究函数性质时,将问题简化到定义域在原点一侧的区间上.

例7 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(b-1)x^2+cx$($b$,$c$ 为常数).

(1)若 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处取得极值,试求 b,c 的值;

(2)若 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$,$(x_2,+\infty)$ 上单调递增且在 (x_1,x_2) 上单调递减,又满足 $x_2-x_1>1$,求证:$b^2>2(b+2c)$;

(3)在(2)的条件下,若 $t<x_1$,试比较 t^2+bt+c 与 x_1 的大小,并加以证明.

解 (1)$f'(x)=x^2+(b-1)x+c$,由题意得 1 和 3 是方程 $x^2+(b-1)x+c=0$ 的两根,

所以 $\begin{cases}1-b=1+3,\\c=1\times3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\c=3.\end{cases}$

(2)由题意得,当 $x\in(-\infty,x_1)$,$(x_2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;$x\in(x_1,x_2)$ 时,$f'(x)<0$.

所以 x_1,x_2 是方程 $f'(x)=x^2+(b-1)x+c=0$ 的两根,

则 $x_1+x_2=1-b$,$x_1x_2=c$.

所以 $b^2-2(b+2c)=b^2-2b-4c=(b-1)^2-4c-1$

$=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-1=(x_2-x_1)^2-1$,因为 $x_2-x_1>1$,

所以 $(x_2-x_1)^2-1>0$,所以 $b^2>2(b+2c)$.

(3)在(2)的条件下,$x^2+(b-1)x+c=(x-x_1)(x-x_2)$,

即 $x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)+x$.

所以 $t^2+bt+c-x_1=(t-x_1)(t-x_2)+t-x_1=(t-x_1)(t+1-x_2)$,

因为 $x_2>1+x_1>1+t$,所以 $t+1-x_2<0$.又 $0<t<x_1$,所以 $t-x_1<0$

所以 $(t-x_1)(t+1-x_2)>0$,即 $t^2+bt+c>x_1$.

例8 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c)$,$f(1)=0$,$g(x)=ax+b$.

(1)求证:函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个交点;

(2)设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点 A、B 在 x 轴上的射影为 A_1、B_1,求 $|A_1B_1|$ 的取值范围;

(3)求证:当 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 时,恒有 $f(x)>g(x)$.



(1)证明　由 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=ax+b \end{cases} \Rightarrow ax^2+(b-a)x+(c-b)=0$.

$\Delta=(b-a)^2-4a(c-b)$. 因为 $f(1)=0$,所以 $a+b+c=0$,且 $a>b>c$,所以 $a>0$,$c-b<0$,故 $\Delta>0$.

所以函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象有两个交点.

(2)解　设方程的两根为 x_1、x_2,则 $x_1+x_2=\frac{a-b}{a}$,$x_1 \cdot x_2=\frac{c-b}{a}$.

$$\text{所以 } |A_1B_1|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\frac{a-b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c-b}{a}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2a+c}{a}\right)^2-4\left(\frac{a+2c}{a}\right)}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{c}{a}-2\right)^2-4}.$$

因为 $a>b>c$,$a+b+c=0$,

所以 $\begin{cases} a>0, \\ 1>\frac{b}{a}>\frac{c}{a}, \\ b=-a-c \end{cases}$

所以 $1>\frac{-a-c}{a}>\frac{c}{a}$,即 $1>-1-\frac{c}{a}>\frac{c}{a}$. 所以 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$,$\frac{9}{4}<\left(\frac{c}{a}-2\right)^2-4<12$.

所以 $\frac{3}{2}<|A_1B_1|<2\sqrt{3}$,即 $|A_1B_1|$ 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},2\sqrt{3}\right)$.

(3)证明　令 $F(x)=f(x)-g(x)$.

所以 $F(x)=ax^2-(a-b)x-b+c=ax^2-(2a+c)x+(a+2c)$.

因为 $x\leqslant-\sqrt{3}$,所以 $x^2\geqslant3$ 且 $-x\geqslant\sqrt{3}>1$,又 $2a+c>0$,

所以 $-x(2a+c)>2a+c$,所以 $F(x)>3a+(2a+c)+(a+2c)=3(2a+c)>0$.

所以 $f(x)>g(x)$.

例9　已知 a,b,c 是实数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,$g(x)=ax+b$,当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$|f(x)|\leqslant1$,证明:

(1) $|c|\leqslant1$;

(2)当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$|g(x)|\leqslant2$;

(3)设 $a>0$,当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$g(x)$ 的最大值为2,求 $f(x)$.

(1)证明　因为 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$|f(x)|\leqslant1$,取 $x=0$,知 $|c|=|f(0)|\leqslant1$,所以 $|c|\leqslant1$.



(2)证法1　当 $a>0$ 时, $g(x)=ax+b$ 在$[-1,1]$上是增函数,所以 $g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$.

因为 $|f(x)|\leqslant 1\ (|x|\leqslant 1)$, $|c|\leqslant 1$,

所以 $g(1)=a+b=f(1)-c\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\geqslant -(|f(-1)|+|c|)\geqslant -2$.

由此,知 $|g(x)|\leqslant 2$.

当 $a<0$ 时, $g(x)=ax+b$ 在$[-1,1]$上是减函数.

所以 $g(-1)\geqslant g(x)\geqslant g(1)$.

因为 $|f(x)|\leqslant 1\ (|x|\leqslant 1)$, $|c|\leqslant 1$,

所以 $g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\leqslant |f(-1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(1)=a+b=f(1)-c\geqslant -(|f(1)|+|c|)\geqslant -2$.

由此知: $|g(x)|\leqslant 2$.

证法2　由 $x=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$, 可知

$$g(x)=ax+b=a\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]+b\left[\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2}\right]$$

$$=\left[a\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+b\left(\frac{x+1}{2}\right)+c\right]-\left[a\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+b\left(\frac{x-1}{2}\right)+c\right]$$

$$=f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $0\leqslant\frac{x+1}{2}\leqslant 1$, $-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 0$.

从而 $|g(x)|=\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leqslant 2$.

证法3　考虑特殊值,将函数中的系数用相应的三个函数值线性表示,考虑 $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, 可得

$$\begin{cases}a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)-2f(0)],\\ b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$$

所以 $g(x)=ax+b=\frac{f(1)+f(-1)-2f(0)}{2}x+\frac{f(1)-f(-1)}{2}$

$$=\frac{x+1}{2}f(1)+\frac{x-1}{2}f(-1)-xf(0).$$

所以 $|g(x)|\leqslant\left|\frac{x+1}{2}\right||f(1)|+\left|\frac{x-1}{2}\right||f(-1)|+|x||f(0)|$



$\leqslant \frac{x+1}{2}+\frac{1-x}{2}+1=2$.问题获证

(3)证明因为 $a>0$,$g(x)$在$[-1,1]$上是增函数,当 $x=1$ 时,取得最大值,即

$g(1)=a+b=f(1)-f(0)=2$。

因为 $-1\leqslant f(0)=c=f(1)-(a+b)=f(1)-2\leqslant 1-2=-1$,

所以 $c=-1$。

因为当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)\geqslant -1$,即 $f(x)\geqslant f(0)$

根据二次函数的性质,知直线 $x=0$ 为 $f(x)$的图象的对称轴,由此,得

$$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=0\Rightarrow b=0,\\ a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=0\end{cases}$$

故 $f(x)=2x^2-1$ 为所求.

例 10 实系数多项式 $p(x)=ax^2+bx+c(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$,当$|x|\leqslant 1$ 时,$|p(x)|\leqslant 1$,令 $q(x)=cx^2+bx+a$,试证明,当$|x|\leqslant 1$ 时,$|q(x)|\leqslant 2$

证明 由 $p(x)=ax^2+bx+c$,得

$$\begin{cases}a=\frac{p(1)+p(-1)-2p(0)}{2},\\ b=\frac{p(1)-p(-1)}{2},\\ c=p(0).\end{cases}$$

而 $q(x)=p(0)x^2+\frac{p(1)-p(-1)}{2}x+\frac{p(1)+p(-1)-2p(0)}{2}$

$$=\frac{x+1}{2}p(1)+\frac{1-x}{2}p(-1)+(x^2-1)p(0).$$

因为 $|p(1)|\leqslant 1$,$|p(-1)|\leqslant 1$,$|p(0)|\leqslant 1$。

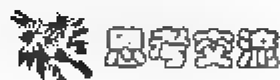
所以,当 $|x|\leqslant 1$ 时,

$$|q(x)|\leqslant\left|\frac{x+1}{2}\right|\cdot|p(1)|+\left|\frac{1-x}{2}\right|\cdot|p(-1)|+|x^2-1|\cdot|p(0)|$$

$$\leqslant\frac{x+1}{2}+\frac{1-x}{2}+1-x^2=2-x^2\leqslant 2.$$

故 $|q(x)|\leqslant 2$





思考交流

思考题1 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1(a,b\in\mathbf{R},a>0)$，设方程 $f(x)=x$ 的两个实数根为 x_1,x_2.

(1)如果 $x_1<2<x_2<4$，设函数的对称轴为 $x=x_0$，求证 $x_0>-1$；

(2)如果 $|x_1|<2$，$|x_2-x_1|=2$，求 b 的取值范围.

解 (1)设 $g(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+1$

因为 $a>0$，所以由条件 $x_1<2<x_2<4$ 知，$g(2)<0$，$g(4)>0$.

即 $\begin{cases}4a+2b-1<0, & ①\\ 16a+4b-3>0. & ②\end{cases}$

由①得 $-12a-6b+3>0$， ③

②+③得 $4a-2b>0$，

所以 $2a>b$，即 $-\frac{b}{2a}>-1$，所以 $x_0>-1$.

(2)由 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1=0$ 知 $x_1x_2=\frac{1}{a}>0$，故 x_1 与 x_2 同号.

①若 $0<x_1<2$，则 $x_2-x_1=2$(负根要舍去)

所以 $x_2=x_1+2>2$.

故 $g(2)<0$，即 $4a+2b-1<0$. (*)

又 $(x_2-x_1)^2=\frac{(b-1)^2}{a^2}-\frac{4}{a}=4$，

所以 $2a+1=\sqrt{(b-1)^2+1}$($a>0$，负的舍去)，

代入(*)，得 $2\sqrt{(b-1)^2+1}<3-2b$，

所以 $b<\frac{1}{4}$.

②若 $-2<x_1<0$，则 $x_2=-2+x_1<-2$(正的舍去)，

所以 $g(-2)<0$，即 $4a-2b+3<0$， (**)

将 $2a+1=\sqrt{(b-1)^2+1}$ 代入(**)式，得

$2\sqrt{(b-1)^2+1}<2b-1$，

所以 $b>\frac{7}{4}$.

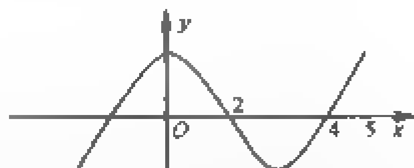
综上可知，b 的取值范围是 $b<\frac{1}{4}$ 或 $b>\frac{7}{4}$.



思考题 2 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 是定义在 R 上的函数，其图象交 x 轴于 A，B，C 三点，若点 B 的坐标为 $(2,0)$，且 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 和 $[4,5]$ 上有相同的单调性，在 $[0,2]$ 和 $[4,5]$ 上有相反的单调性.

(1)在函数的图象上是否存在一点 $M(x_0,y_0)$，使得在点 M 的切线斜率为 $3b$？若存在，求出点 M 的坐标，若不存在，说明理由；

(2)求 $|AC|$ 的取值范围.



解 (1)由条件知，$x=0$ 为函数的极值，故 $f'(0)=0\Rightarrow c=0$.

我们以 $a>0$ 的图象来考虑问题，由右图知 $f'(x)=3ax^2+2bx=3ax\left(x+\frac{2b}{3a}\right)=0$ 的一根为 0，另一根必在 2 到 4 之间，即 $-\frac{2b}{3a}\in[2,4]$，所以 $-6\leqslant\frac{b}{a}\leqslant-3$. 又 $3ax^2+2bx=3b$，所以 $\Delta=4b^2+36ab=4a^2\left[\left(\frac{b}{a}+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}\right]<0$，故不存在这样的点 M.

(2)因为 $f(2)=0$，得 $d=-(8a+4b)$

所以 $f(x)=ax^3+bx^2-8a-4b=a(x^3-8)+b(x^2-4)$

$=(x-2)[ax^2+(2a+b)x+4a+2b]$.

$x_1+x_2=-\frac{2a+b}{a}$，$x_1x_2=\frac{4a+2b}{a}$.

$|AC|^2=(x_1-x_2)^2=(t-2)^2-16$，其中 $t=\frac{b}{a}$，$-6\leqslant t<-3$. $|AC|\in(3,4\sqrt{3}]$.

同步检测 4

1. 已知 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+3x+2$. 若当 $x\in[1,3]$ 时，$n\leqslant f(x)\leqslant m$ 恒成立，则 $m-n$ 的最小值为 …………………… ( )

A. 2 B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

2. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbf{R},a<0)$，对一切实数 x 等式 $f(1-x)=f(1+x)$ 均成立，且 $f(-1)<0$，$f(0)>0$，则有 …………………… ( )

A. $a+b+c<0$ B. $b<a+c$

C. $c<2b$ D. $abc>0$

3. 已知函数 $f(x)=-x-x^3$，x_1，x_2，$x_3\in\mathbf{R}$ 且 $x_1+x_2>0$，$x_2+x_3>0$，$x_3+x_1>0$，则 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 的值 …………………… ( )



A. 一定大于零 B. 一定小于零

C. 等于零 D. 正负都有可能

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+(a^2-1)x+a-2(x>0)$ 与函数 $g(x)=\log_a x$ 的单调区间相同且相同区间上的单调性相同，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$. 若 $f(x)=m$ 有且仅有两个实数解，则实数 a 和 m 的取值范围分别是……………………（ ）

A. $a=\sqrt{2}-1, -2<m<\sqrt{2}-3$ B. $a=\sqrt{2}-1, -2<m\leqslant\sqrt{2}-3$

C. $a=\sqrt{2}+1, m>-2$ D. $a=\sqrt{2}+1, m\geqslant\sqrt{2}-3$

5. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数（例如 $[5.5]=5$，$[-5.5]=-6$），则不等式 $[x]^2-5[x]+6\leqslant0$ 的解集为……………………（ ）

A. $(2,3)$ B. $[2,4)$ C. $[2,3]$ D. $[2,4]$

6. 若对任何 $x\in[0,1]$，不等式 $1-kx\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant1-lx$ 恒成立，则一定有……（ ）

A. $k\geqslant0, l\geqslant\dfrac{1}{3}$ B. $k\geqslant0, l\leqslant\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

C. $k\geqslant\dfrac{1}{4}, l\leqslant\dfrac{1}{3}$ D. $k\geqslant\dfrac{1}{2}, l\leqslant\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

7. 函数 $f(x)=|x^2-a|$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值 $M(a)=$________.

8. 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant0, x^2-2(a+7)x+5\leqslant0, x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

9. 使不等式 $\sin^2x+a\cos x+a^2\geqslant1+\cos x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的负数 a 的取值范围是________.

10. 已知 α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个不相等实根，函数 $f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$.

(1) 求 $g(t)=[f(x)]_{\max}-[f(x)]_{\min}$；

(2) 证明：对于 $u_i\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)(i=1,2,3)$，若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$，则有 $\dfrac{1}{g(\tan u_1)}+\dfrac{1}{g(\tan u_2)}+\dfrac{1}{g(\tan u_3)}<\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

11. 集合 A 是由符合以下性质的函数 $f(x)$ 构成的：对于任意的 $u,v\in(-1,1)$ 且 $u\neq v$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant3|u-v|$.

(1) 分别判断函数 $f_1(x)=\sqrt{1+x^2}$ 及 $f_2(x)=\log_2(x+1)$ 是否在集合 A 中，并说明理由；

(2) 设函数 $f(x)=ax^2+bx$ 且 $f(x)\in A$，试求 $2a+b$ 的取值范围；



(3)在(2)的条件下，若 $f(2)=6$，且对于满足(2)的每个实数 a，存在最小的实数 m，使得当 $x\in[m,2]$ 时，$|f(x)|\leqslant 6$ 恒成立，试求用 a 表示 m 的表达式.

12. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，对应的方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有两个相异的实数根.

(1)求证：$b>2c$，$a>c$；

(2)求证：$f(0)f(1)<\frac{a^2}{16}$.

13. 设 x_1,x_2 是函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{2}x^2-a^2x(a>0)$ 的两个极值点，且 $|x_1|+|x_2|=2$. (1)证明：$0<a\leqslant 1$；

(2)证明：$|b|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$；

(3)若函数 $h(x)=f'(x)-2a(x-x_1)$，证明：当 $x_1<x<2$ 且 $x_1<0$ 时，$|h(x)|\leqslant 4a$.

14. 已知 $b>-1$，$c>0$，函数 $f(x)=x+b$ 的图象与函数 $g(x)=x^2+bx+c$ 的图象相切. (1)设 $b=\varphi(c)$，求 $\varphi(c)$；

(2)设 $D(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$（其中 $x>-b$）在 $[-1,+\infty)$ 上是增函数，求 c 的最小值；

(3)是否存在常数 c，使得函数 $H(x)=f(x)g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有极值点？若存在，求出 c 的取值范围；若不存在，请说明理由.

15. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\in\mathbf{N}^*$，$b\in\mathbf{N}$，$c\in\mathbf{Z}$.

(1)若 $b>2a$，且 $f(\sin x)(x\in\mathbf{R})$ 的最大值是 2，最小值是 -4，试求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)若对任意实数 x，不等式 $4x\leqslant f(x)\leqslant 2(x^2+1)$ 恒成立，且存在 x_0，使得不等式 $f(x_0)<2(x_0^2+1)$ 成立，求 c 的值.

16. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 满足条件：

(1)当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geqslant x$；

(2)当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$；

(3)$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m(m>1)$，使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$.

17. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $|f(x)|\leqslant 1$，求证：当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$|f(x)|\leqslant 7$.

18. 二次函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 中，实数 p,q,r 满足 $\frac{p}{m+2}+\frac{q}{m+1}+\frac{r}{m}=0$，其中 $m>0$，求证：(1)$pf\left(\frac{m}{m+1}\right)<0$；(2)方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内恒有解.



第五讲 幂函数、指数函数与对数函数

知识点金

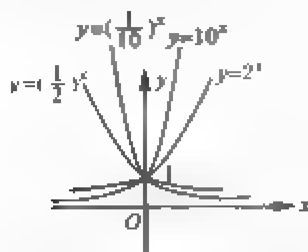
1 指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 互为反函数，从概念、图象、性质去理解它们的区别和联系.

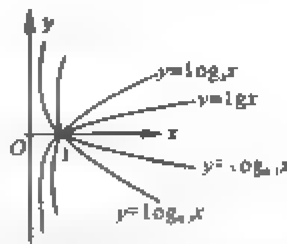
名称	指数函数	对数函数
一般形式	$y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$	$y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
过定点	$(0,1)$	$(1,0)$
图象	指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象关于 $y=x$ 对称	
	$y=a^x(a>1)$; $y=a^x(0<a<1)$	$y=\log_a x(a>1)$; $y=\log_a x(0<a<1)$
单调性	$a>1$,在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数 $0<a<1$,在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数	$a>1$,在 $(0,+\infty)$ 上为增函数 $0<a<1$,在 $(0,+\infty)$ 上为减函数
值分布	$y>1(a>1,x>0$ 或 $0<a<1,x<0)$ $0<y<1(a>1,x<0$ 或 $0<a<1,x>0)$	$y>0(a>1,x>1$ 或 $0<a<1,0<x<1)$,$y<0(a>1,0<x<1$ 或 $0<a<1,x>1)$



2 比较两个幂值的大小，是一类易错题，解决这类问题，首先要分清底数相同还是指数相同，如果底数相同，可利用指数函数的单调性；指数相同，可以利用指数函数的底数与图象关系（对数式比较大小同理）。

记住下列以特殊值为底数的函数图象．



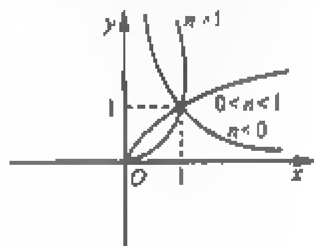


3．研究指数、对数函数问题，尽量化为同底，并注意对数问题中的定义域限制

4 指数函数与对数函数中的绝大部分问题是指数函数与对数函数和其他函数的复合问题，讨论复合函数的单调性是解决问题的重要途径

5．形如 $y=x^n$ 的函数称为幂函数，其中 x 为自变量，n 为常数，在中学阶段只讨论 n 为有理数的情形 幂函数的图象是不通过第四象限的一条曲线．当 $n>0$ 时，图象都通过点 $(0,0)$，$(1,1)$，在第一象限内，函数为增函数；当 $n<0$ 时，图象都通过点 $(1,1)$，在第一象限内为减函数

6 幂函数在第一象限内非直线型的图象分布为如右图形式



例题精析

例 1 已知 $0<a<1$，$x^2+y=0$，求证：$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}$．

证明 因为 $0<a<1$，$a^x>0$，$a^y>0$，由平均不等式

$a^x+a^y\geqslant 2\sqrt{a^x\cdot a^y}=2a^{\frac{x+y}{2}}$，

故 $\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a(2a^{\frac{x+y}{2}})=\log_a 2+\frac{1}{2}(x+y)$

$$=\log_a 2+\frac{1}{2}(x-x^2)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}$$

例 2 解方程：$\lg^2 x-[\lg x]-2=0$．

其中$[x]$表示不超过x的最大整数.

解 由$[x]$的定义知,$[x]\leqslant x$,故原方程可变为不等式

$\lg^2 x-\lg x-2\leqslant 0$,

所以$-1\leqslant \lg x\leqslant 2$.

当$-1\leqslant \lg x<0$时,$[\lg x]=-1$,原方程为$\lg^2 x=1$,所以$\lg x=-1$,$x=\frac{1}{10}$.

当$0\leqslant \lg x<1$时,$[\lg x]=0$,原方程为

$\lg^2 x=2$,所以$\lg x=\pm\sqrt{2}$,均不符合$[\lg x]=0$.

当$1\leqslant \lg x<2$时,$[\lg x]=1$,原方程为

$\lg^2 x=3$,所以$\lg x=\sqrt{3}$,$x=10^{\sqrt{3}}$.

当$\lg x=2$,即$x=100$满足原方程,故原方程的解为:

$x_1=\frac{1}{10}$,$x_2=10^{\sqrt{3}}$,$x_3=100$.

例3 已知$x,y\in(0,1)$,$F=\min\{2^{-x},2^{x-y},2^{y-1}\}$,求$F$的最大值.

解 因为F是$2^{-x},2^{x-y},2^{y-1}$中最小者,故F不大于这三者的几何平均值,即

$F\leqslant\sqrt[3]{2^{-x}\cdot 2^{x-y}\cdot 2^{y-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

当且仅当$-x=-\frac{1}{3}$,$x-y=-\frac{1}{3}$,$y-1=-\frac{1}{3}$时等号成立,即当

$x=\frac{1}{3}$,$y=\frac{2}{3}$时,$F=2^{-\frac{1}{3}}$.

所以$F_{max}=2^{-\frac{1}{3}}$.

例4 已知函数$f(x)=\lg(a^x-kb^x)(k\in\mathbf{R}^+,a>1>b>0)$的定义域为$(0,+\infty)$,问是否存在这样的$a,b$,使$f(x)$恰在$(1,+\infty)$上取正值,且$f(3)=\lg 4$.若存在,求出$a,b$的值;若不存在,说明理由.

解 由$a^x-kb^x>0$,得$\left(\frac{a}{b}\right)^x>k$,因为$a>1>b>0$,所以$\frac{a}{b}>1$,所以$x>\log_{\frac{a}{b}}k$.

又$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$,所以$\log_{\frac{a}{b}}k=0$,$k=1$,所以$f(x)=\lg(a^x-b^x)$.

设$0<x_1<x_2$,$y_1-y_2=\lg\frac{a^{x_1}-b^{x_1}}{a^{x_2}-b^{x_2}}$,因为$a>1>b>0$,所以$a^{x_1}<a^{x_2}$,$-b^{x_1}<-b^{x_2}$.

所以$0<a^{x_1}-b^{x_1}<a^{x_2}-b^{x_2}$,所以$0<\frac{a^{x_1}-b^{x_1}}{a^{x_2}-b^{x_2}}<1$,所以$\lg\frac{a^{x_1}-b^{x_1}}{a^{x_2}-b^{x_2}}<0$.

所以$y_1-y_2<0$,$y_1<y_2$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

所以$x\in(1,+\infty)$时,必有$f(x)>f(1)=\lg(a-b)$.

因为$f(x)$在$(1,+\infty)$上取正值,所以$\lg(a-b)=0$,$a-b=1$. (1)



又 $f(3)=\lg 4$，所以 $\lg(a^2-b^2)=\lg 4$，$a^2-b^2=4$。 (2)

解(1)(2)得 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，即存在 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$b=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 满足条件.

例 5 已知函数 $f(x)=\log_m\frac{x-3}{x+3}$.

(1)若 $f(x)$ 的定义域为 $[\alpha,\beta](\beta>\alpha>0)$，判断 $f(x)$ 在定义域上的增减性，并加以说明；

(2)当 $0<m<1$ 时，是否存在 m 使 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta](\beta>\alpha>0)$ 上的值域为 $[\log_m m(\beta-1),\log_m m(\alpha-1)]$？请说明理由.

解 (1) $\frac{x-3}{x+3}>0\Leftrightarrow x<-3$ 或 $x>3$.

因为 $f(x)$ 定义域为 $[\alpha,\beta]$，所以 $\alpha>3$.

设 $\beta\geqslant x_1>x_2\geqslant\alpha$，有 $\frac{x_1-3}{x_1+3}-\frac{x_2-3}{x_2+3}=\frac{6(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}>0$

当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 为减函数，当 $m>1$ 时，$f(x)$ 为增函数.

(2)若 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的值域为 $[\log_m m(\beta-1),\log_m m(\alpha-1)]$

因为 $0<m<1$，$f(x)$ 为减函数.

所以 $\begin{cases}f(\beta)=\log_m\frac{\beta-3}{\beta+3}=\log_m m(\beta-1),\\ f(\alpha)=\log_m\frac{\alpha-3}{\alpha+3}=\log_m m(\alpha-1).\end{cases}$

即 $\begin{cases}m\beta^2+(2m-1)\beta-3(m-1)=0,\\ m\alpha^2+(2m-1)\alpha-3(m-1)=0.\end{cases}$

又 $\beta>\alpha>3$，即 α,β 为方程 $mx^2+(2m-1)x-3(m-1)=0$ 的大于 3 的两个根.

所以 $\begin{cases}0<m<1,\\ \Delta=16m^2-16m+1>0,\\ -\frac{2m-1}{2m}>3,\\ mf(3)>0,\end{cases}$ 所以 $0<m<\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

故当 $0<m<\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ 时，满足题意条件的 m 存在.

例 6 已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$，其中 n 为大于 2 的整数，$[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正，且满足 $a_1=b(b>0)$，$a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$，$n=2,3,4,\cdots$



(1)证明 $a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$，$n=3,4,5,\cdots$

(2)猜测数列$\{a_n\}$是否有极限？如果有，写出极限的值(不必证明)；

(3)试确定一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对任意 $b>0$，都有 $a_n<\frac{1}{5}$。

解 (1)**证法 1** 因为当 $n\geqslant 2$ 时，$0<a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$，所以$\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$，

即$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}$

于是有$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\geqslant\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}$。

所有不等式两边相加可得$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$。

由已知不等式知，当 $n\geqslant 3$ 时有$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$

因为 $a_1=b$，所以$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}[\log_2 n]=\frac{2+b[\log_2 n]}{2b}$，$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$

证法 2 设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，首先利用数学归纳法证不等式

$a_n\leqslant\frac{b}{1+f(n)b}$，$n=3,4,5,\cdots$

当 $n=3$ 时，由 $a_3\leqslant\frac{3a_2}{3+a_2}=\frac{3}{\frac{3}{a_2}+1}\leqslant\frac{3}{3\cdot\frac{2+a_1}{2a_1}+1}=\frac{b}{1+f(3)b}$知不等式成立。

假设当 $n=k(k\geqslant 3)$时，不等式成立，即 $a_k\leqslant\frac{b}{1+f(k)b}$，

则 $a_{k+1}\leqslant\frac{(k+1)a_k}{(k+1)+a_k}=\frac{k+1}{\frac{(k+1)}{a_k}+1}\leqslant\frac{k+1}{(k+1)\cdot\frac{1+f(k)b}{b}+1}$

$=\frac{(k+1)b}{(k+1)+(k+1)f(k)b+b}=\frac{b}{1+\left(f(k)+\frac{1}{k+1}\right)b}=\frac{b}{1+f(k+1)b}$，

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立。

故 $a_n\leqslant\frac{b}{1+f(n)b}$，$n=3,4,5,\cdots$

又由已知不等式得 $a_n<\frac{b}{1+\frac{1}{2}[\log_2 n]b}=\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$，$n=3,4,5,\cdots$



(2)有极限,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(3)因为 $\dfrac{2b}{2+b[\log_2 n]}<\dfrac{2}{[\log_2 n]}$,令 $\dfrac{2}{[\log_2 n]}<\dfrac{1}{5}$,

则有 $\log_2 n\geq[\log_2 n]>10\Rightarrow n>2^{10}=1024$.

故可取 $N=1024$,当 $n>N$ 时,都有 $a_n<\dfrac{1}{5}$.

例7 已知函数 $f(x)=\ln x$,$g(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+bx$,$(a\neq0)$

(1)若 $b=2$,且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间,求 a 的取值范围.

(2)设函数 $f(x)$ 的图象 C_1 与函数 $g(x)$ 的图象 C_2 交于点 P、Q,过线段 PQ 的中点作 x 轴的垂线分别交 C_1、C_2 于点 M、N,证明:C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行.

解 (1)$b=2$ 时,$h(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-2x$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-ax-2=-\dfrac{ax^2+2x-1}{x}$.

因为函数 $h(x)$ 存在单调递减区间,所以 $h'(x)<0$ 有解.

又因为 $x>0$ 时,则 $ax^2+2x-1>0$ 有 $x>0$ 的解;

①当 $a>0$ 时,$y=ax^2+2x-1$ 为开口向上的抛物线,$ax^2+2x-1>0$ 总有 $x>0$ 的解;

②当 $a<0$ 时,$y=ax^2+2x-1$ 为开口向下的抛物线,而 $ax^2+2x-1>0$ 总有 $x>0$ 的解;

则 $\Delta=4+4a>0$,且方程 $ax^2+2x-1=0$ 至少有一正根,此时,$-1<a<0$.

综上所述,a 的取值范围为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(2)**证法1** 设点 P、Q 的坐标分别是 (x_1,y_1),(x_2,y_2),$0<x_1<x_2$,

则点 M、N 的横坐标为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$,

C_1 在点 M 处的切线斜率为 $k_1=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=\frac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{2}{x_1+x_2}$,

C_2 在点 N 处的切线斜率为 $k_2=ax+b\Big|_{x=\frac{x_1+x_2}{2}}=\dfrac{a(x_1+x_2)}{2}+b$

假设 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线平行,则 $k_1=k_2$

即 $\dfrac{2}{x_1+x_2}=\dfrac{a(x_1+x_2)}{2}+b$,则

$$\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}=\frac{a}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=\left(\frac{a}{2}x_2^2+bx_2\right)-\left(\frac{a}{2}x_1^2+bx_1\right)$$

$$=y_2-y_1=\ln x_2-\ln x_1.$$



所以 $\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{1+\frac{x_2}{x_1}}$．设 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $\ln t=\frac{2(t-1)}{1+t}$，$t>1$　　①

令 $r(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{1+t}$，$t>1$，则 $r'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$．

因为 $t>1$ 时，$r'(t)>0$，所以 $r(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增．故 $r(t)>r(1)=0$

则 $\ln t>\frac{2(t-1)}{1+t}$，这与①矛盾，假设不成立．

故 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行．

证法2　同证法1得 $(x_2+x_1)(\ln x_2-\ln x_1)=2(x_2-x_1)$．

因为 $x_1>0$，所以 $\left(\frac{x_2}{x_1}+1\right)\ln\frac{x_2}{x_1}=2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)$

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，得 $(t+1)\ln t=2(t-1)$，$t>1$．　　②

令 $r(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)$，$t>1$，则 $r'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$．

因为 $\left(\ln t+\frac{1}{t}\right)'=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$，所以 $t>1$ 时，$\left(\ln t+\frac{1}{t}\right)'>0$

故 $\ln t+\frac{1}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，从而 $\ln t+\frac{1}{t}-1>0$，即 $r'(t)>0$．

于是 $r(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增

故 $r(t)>r(1)=0$，即 $(t+1)\ln t>2(t-1)$，这与②矛盾，假设不成立．

故 C_1 在点 M 处的切线与 C_2 在点 N 处的切线不平行．

例6　已知函数 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ $(a>0,a\neq1)$．

(1)证明函数 $f(x)$ 的图象关于点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 对称．

(2)令 $a_n=\frac{\sqrt{a}f(n)}{f(1-n)}$，对一切自然数 n，先猜想使 $a_n>n^2$ 成立的最小自然数 a，并证明之．

(3)求证：$\frac{1}{4}n(n+1)\lg3>\lg(n!)$ $(n\in N)$．

解　(1)函数的图象关于定点 P 对称，可采用解几中的坐标证法．

设 $M(x,y)$ 是 $f(x)$ 图象上任一点，则 M 关于 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的对称点为 $M'(1-x,1-y)$．



因为 $\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}=\frac{a}{a+\sqrt{a}\cdot a^x}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}$,

$1-y=1-\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}$,

所以 $f(1-x)=1-y$.

所以 $M'(1-x,1-y)$ 亦在 $f(x)$ 的图象上.

故函数 $f(x)$ 的图象关于点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 对称.

(2)将 $f(n)$, $f(1-n)$ 的表达式代入 a_n 的表达式,化简可得 $a_n=a^n$,猜 $a=3$

即 $3^n>n^2$.

下面用数学归纳法证明.

设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时,$3^k>k^2$.

那么 $n=k+1$ 时,$3^{k+1}=3\cdot 3^k>3k^2$.

又 $3k^2-(k+1)^2=2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\geqslant 0$,

所以 $3^n>n^2$.

(3)因为 $3^k>k^2$,所以 $k\lg 3>2\lg k$.

令 $k=1,2,\cdots,n$,得 n 个同向不等式,并相加得

$\frac{n(n+1)}{2}\lg 3>2\lg(1\times 2\cdots n)$,

故 $\frac{n}{4}(n+1)\lg 3>\lg(n!)$.

点评 函数与数列综合型问题在高考中频频出现,是历年高考试题中的一个重点.

例9 已知 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$,其中 $a>1$.

(1)试求 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2)求出 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;

(3)判断函数 $f^{-1}(x)$ 的奇偶性和单调性;

(4)若实数 m 满足 $f^{-1}(1-m)+f^{-1}(1-m^2)<0$,求 m 的取值范围.

解 (1)由于 $\sqrt{x^2+1}>|x|$,所以,函数 $f(x)$ 的定义域为 R.

为求 $f(x)$ 的值域,观察函数 $u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ 的解析式.注意到 $u(x)$ 其实是一个单调函数($y=x$)和一个非单调函数($y=\sqrt{x^2+1}$)之和,因此,$u(x)$ 的单调性并不能通过简单判断很快得到.

解决这个问题,我们可以有下面的两种选择.



①从单调性的定义出发，即任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，比较 $u(x_1)$、$u(x_2)$ 的大小关系，这种方法留给同学自己完成.

②因为 $u'=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$，$u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时，$u(x)$ 的取值范围为 $(1,+\infty)$；

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$-x\in(0,+\infty)$，因此，若令 $t=-x$，则

$u(x)=-t+\sqrt{t^2+1}=\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}$.

由 $t\in(0,+\infty)$，则 $t+\sqrt{t^2+1}\in(1,+\infty)$ 可知：此时 $u(x)$ 的取值范围为 $(0,1)$.

又 $x=0$ 时，$u(x)=1$，所以，函数 $u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ 的值域为 $(0,+\infty)$.

所以，函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

(2)设 $y=f(x)$，则 $a^y=x+\sqrt{x^2+1}$，利用 $x+\sqrt{x^2+1}$ 与 $\sqrt{x^2+1}-x$ 互为倒数，可得 $a^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x$，所以，$x=\dfrac{1}{2}(a^y-a^{-y})$.

所以，$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$，$x\in\mathbf{R}$.

(3)任取 $x\in\mathbf{R}$，则 $f^{-1}(-x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f^{-1}(x)$，所以，函数 $f^{-1}(x)$ 为奇函数.

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则由 $a>1$ 及指数函数的性质可知：

$a^{x_1}<a^{x_2}$，$a^{-x_1}>a^{-x_2}$.

所以，$a^{x_1}-a^{-x_1}<a^{x_2}-a^{-x_2}$，即 $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$.

所以，$f^{-1}(x)$ 在定义域内单调递增.

(4)由 $f^{-1}(1-m)+f^{-1}(1-m^2)<0$ 得 $f^{-1}(1-m)<-f^{-1}(1-m^2)$，即：

$f^{-1}(1-m)<f^{-1}(-1+m^2)$.

结合 $f^{-1}(x)$ 的单调性可知，上式等价于 $1-m<-1+m^2$，解之得 $m>1$，或 $m<-2$.

点评 ①定义域是研究函数的基础，求值域、判断奇偶性、单调性、研究函数图象等都应先从定义域出发. ②从定义域出发，利用函数的单调性，是求函数值域常用的方法.

例 10 (Ⅰ)设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)(0<x<1)$，求 $f(x)$ 的最小值.

(Ⅱ)设正数 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{2^n}$ 满足 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$，求证：$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n$.

(Ⅰ)**解** 对函数 $f(x)$ 求导数：$f'(x)=(x\log_2 x)'+[(1-x)\log_2(1-x)]'=\log_2 x$

$\log_2(1-x)+\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\log_2 x-\log_2(1-x)$.

于是 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\log_2 x-\log_2(1-x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 是减函数

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\log_2 x-\log_2(1-x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 是增函数

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 时取得最小值，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$.

(Ⅱ)证法 1　用数学归纳法证明.

(1)当 $n=1$ 时，由(Ⅰ)知命题成立.

(2)假设当 $n=k$ 时命题成立，即若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^k}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1$，

则 $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}\geqslant -k$

当 $n=k+1$ 时，若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^{k+1}}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1$.

令 $x=p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}$，$q_1=\frac{p_1}{x}$，$q_2=\frac{p_2}{x}$，$\cdots$，$q_{2^k}=\frac{p_{2^k}}{x}$.

则 $q_1,q_2,\cdots,q_{2^k}$ 为正数，且 $q_1+q_2+\cdots+q_{2^k}=1$.

由归纳假设知 $q_1\log_2 q_1+q_2\log_2 q_2+\cdots+q_{2^k}\log_2 q_{2^k}\geqslant -k$.

$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}=x(q_1\log_2 q_1+q_2\log_2 q_2+\cdots+q_{2^k}\log_2 q_{2^k}+\log_2 x)\geqslant x(-k)+x\log_2 x$,　①

同理，由 $p_{2^k+1}+p_{2^k+2}+\cdots+p_{2^{k+1}}=1-x$ 可得 $p_{2^k+1}\log_2 p_{2^k+1}+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}\geqslant(1-x)(-k)+(1-x)\log_2(1-x)$.　②

综合①、②两式 $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}\geqslant[x+(1-x)](-k)+x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)\geqslant-(k+1)$.

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据(1)、(2)可知对一切正整数 n 命题成立.

证法 2　令函数 $g(x)=x\log_2 x+(c-x)\log_2(c-x)$（常数 $c>0$，$x\in(0,c)$），那么

$g(x)=c\left[\frac{x}{c}\log_2\frac{x}{c}+\left(1-\frac{x}{c}\right)\log_2\left(1-\frac{x}{c}\right)+\log_2 c\right]$,

利用(Ⅰ)知，当 $\frac{x}{c}=\frac{1}{2}$（即 $x=\frac{c}{2}$）时，函数 $g(x)$ 取得最小值.

对任意 $x_1>0$，$x_2>0$，都有

$$\begin{aligned}x_1\log_2 x_1+x_2\log_2 x_2&\geqslant 2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}\log_2\frac{x_1+x_2}{2}\\&=(x_1+x_2)[\log_2(x_1+x_2)-1]\end{aligned}\quad ①$$



下面用数学归纳法证明结论.

(1)当 $n=1$ 时,由(Ⅰ)知命题成立.

(2)设当 $n=k$ 时命题成立,即若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^k}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1$,有

$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}\geqslant -k$.

当 $n=k+1$ 时,$p_1,p_2,\cdots,p_{2^{k+1}}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1$.

令 $H=p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^{k+1}-1}\log_2 p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$.

由①得

$H\geqslant(p_1+p_2)[\log_2(p_1+p_2)-1]+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})[\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})-1]$.

因为 $(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})=1$,

由归纳假设

$(p_1+p_2)\log_2(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\geqslant -k$,得

$H\geqslant -k-(p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})=-(k+1)$.

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

所以对一切正整数 n 命题成立.



思考交流

思考题1 若实函数 a、b、c、d 满足 $a>c>d>b>1$,$ab>cd$.证明:函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$,$f(x)=a^x+b^x-c^x-d^x$ 为严格递增函数.

证明 因为 $f(x)=a^x+b^x-c^x-d^x$

$$=a^x+b^x-c^x-\left(\frac{ab}{c}\right)^x+d^x\left(\frac{ab}{cd}\right)^x-d^x$$

$$=c^x\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x-1\right]+b^x\left[1-\left(\frac{a}{c}\right)^x\right]+d^x\left[\left(\frac{ab}{cd}\right)^x-1\right]$$

$$=\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x-1\right](c^x-b^x)+d^x\left[\left(\frac{ab}{cd}\right)^x-1\right]$$

$$=b^x\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x-1\right]\left[\left(\frac{c}{b}\right)^x-1\right]+d^x\left[\left(\frac{ab}{cd}\right)^x-1\right].$$

因为 $b>1$,$\frac{a}{c}>1$,$\frac{c}{b}>1$,$d>1$,$\frac{ab}{cd}>1$,故上式所有因子均大于零且递增,从而 f 为增函数.

思考题2 已知 $a,b,\lambda\in\mathbf{R}_+$,试确定 $g(a,b)=\sqrt{\frac{a}{a+\lambda b}}+\sqrt{\frac{b}{b+\lambda a}}$ 的取值范围.



解 不妨设 $a+b=1$ $\left(因为可令\ x=\frac{a}{a+b},y=\frac{b}{a+b}\right)$，

$$g(a,b)=\frac{a}{a+\lambda b}+\frac{b}{b+\lambda a}+2\sqrt{\frac{ab}{(a+\lambda b)(b+\lambda a)}}$$

$$=\frac{\lambda+2(1-\lambda)ab}{\lambda+(1-\lambda)^2ab}+2\sqrt{\frac{ab}{\lambda+(1-\lambda)^2ab}}$$

当 $\lambda\neq 1$ 时，

$$g(a,b)=\frac{1}{1-\lambda}\left[2-\frac{\lambda(1+\lambda)}{\lambda+(1-\lambda)^2ab}\right]+\frac{2}{|1-\lambda|}\sqrt{1-\frac{\lambda}{\lambda+(1-\lambda)^2ab}}$$

令 $t=\sqrt{1-\frac{\lambda}{\lambda+(1-\lambda)^2ab}}$

因为 $a+b=1$，则 $ab\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$

故 $t\in\left(0,\frac{|1-\lambda|}{1+\lambda}\right]$，

记 $f(t)=\frac{2}{1-\lambda}-\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(1-t^2)+\frac{2}{|1-\lambda|}t$

$$=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}t^2+\frac{2}{|1-\lambda|}\cdot t+1$$

当 $0<\lambda<1$ 时，

$$f(t)=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}t^2+\frac{2}{1-\lambda}t+1$$

$$=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\left(t+\frac{1}{1+\lambda}\right)^2+\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}，$$

显然，$f(t)$ 在 $\left(0,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right]$ 上为增函数，所以

$f(0)<f(t)\leqslant f\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)$，

即 $1<f(t)\leqslant\frac{4}{1+\lambda}$。

当 $\lambda>1$ 时，

$$f(t)=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\left(t-\frac{1}{1+\lambda}\right)^2+\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1},t\in\left(0,\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right]$$

(1) $1<\lambda<2$，易知 $f(t)$ 在 $\left(0,\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right]$ 上为增函数，所以

$f(0)<f(t)\leqslant f\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)$，即 $1<f(t)\leqslant\frac{4}{1+\lambda}$



(2) $2\leqslant\lambda<3$，结合图象知，

$f(0)<f(t)\leqslant f\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)$，即 $1<f(t)\leqslant\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}$

(3) $\lambda\geqslant3$，结合图象知

$f\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)\leqslant f(t)\leqslant f\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)$，即 $\frac{4}{1+\lambda}\leqslant f(t)\leqslant\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}$

当 $\lambda=1$ 时，显然有 $1<f(t)\leqslant2=\frac{4}{1+\lambda}$

综上，可得

当 $0<\lambda<2$ 时，$1<g(a,b)\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}$；

当 $2\leqslant\lambda<3$ 时，$1<g(a,b)\leqslant\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}$；

当 $\lambda\geqslant3$ 时，$\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\leqslant g(a,b)\leqslant\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}$，

当且仅当 $a=b$ 时，$g(a,b)=\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}$ 成立，

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{\lambda^2-3\lambda\pm(\lambda^2-1)\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$ 时，$g(a,b)=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}$ 成立

同步检测 5

1. 若函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+3)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$ 上是减函数，则 a 的取值范围可用区间表示为…………（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,2\sqrt{3})$　　D. $(0,1)\cup(1,2\sqrt{3})$

2. 如果一个点是一个指数函数与一个对数函数的图象的公共点，那么称这个点为“好点”。在下面的五个点 $M(1,1)$、$N(1,2)$、$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$、$Q(2,1)$、$G(2,2)$、$H\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 中，“好点”的个数为…………（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. 已知函数 $y=\log_a x$ 的图象与其反函数的图象有交点，且交点的横坐标为 x_0，则有…………（　　）



A. $a>1$ 且 $x_0>1$　　　　B. $0<a<1$ 且 $0<x_0<1$

C. $a>1$ 且 $0<x_0<1$　　　　D. $0<a<1$ 且 $x_0>1$ 或 $a>1$ 且 $x_0>1$

4. 已知 x_1 是方程 $x+\lg x=3$ 的根，x_2 是方程 $x+10^x=3$ 的根，那么 x_1+x_2 的值为 (　　)

A. 6　　　　B. 3　　　　C. 2　　　　D. 1

5. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax-a)$ 的值域为 **R**，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 上是增函数，则 a 的取值范围是______.

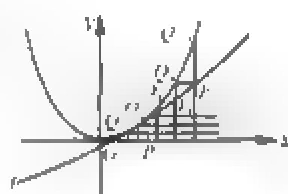
6. 设 a，b 分别是方程 $\log_2 x+x-3=0$ 和 $2^x+x-3=0$ 的根，则 $a+b=$______，$\log_2 a+2^b=$______.

7. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：存在非零常数 T，对任意 $x\in$ **R**，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立。设函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象与 $y=x$ 的图象有公共点，证明：$f(x)=a^x\in M$.

8. 已知函数 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}+a\ln x(x>0)$，$f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$，对任意两个不相等的正数 x_1，x_2，证明：

(1) 当 $a\leqslant 0$ 时，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$；

(2) 当 $a\leqslant 4$ 时，$|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$.



9. 设 $a>0$，如图，已知直线 l：$y=ax$ 及曲线 C：$y=x^2$，C 上的点 Q_1 的横坐标为 $a_1(0<a_1<a)$。从 C 上的点 $Q_n(n\geqslant 1)$ 作直线平行于 x 轴，交直线 l 于点 P_{n+1}，再从点 P_{n+1} 作直线平行于 y 轴，交曲线 C 于点 Q_{n+1}。$Q_n(n=1,2,\cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{a_n\}$。

(1) 试求 a_{n+1} 与 a_n 的关系，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 当 $a=1$，$a_1\leqslant\frac{1}{2}$ 时，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\frac{1}{32}$；

(3) 当 $a=1$ 时，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\frac{1}{3}$.

10. 设函数 $f_n(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$

(1) 讨论函数 $f_2(x)$ 与 $f_3(x)$ 的单调区间；

(2) 求证：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，方程 $f_n(x)=0$ 最多有一个实数解.

11. 是否存在满足下列条件的长方体：(1) 由长方体的一个顶点出发的三条棱长之和为 ；(2) 长方体表面积为 $\frac{16}{2}$。若存在，求出长方体的体积的最大值和最小值；若不存在，说明理由.



12. 已知函数 $f(x)=\log_a \dfrac{1-m(x-2)}{x-3}$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$，对定义域内的任意 x 都有 $f(2-x)+f(2+x)=0$ 成立.

(1) 求实数 m 的值；

(2) 若当 $x\in(b,a)$ 时，$f(x)$ 的取值范围恰为 $(1,+\infty)$，求实数 a、b 的值.

13. 已知 $f(x)=\log_4(4^x+1)+kx$ $(k\in\mathbf{R})$ 是偶函数.

(1) 求 k 的值；

(2) 证明：对任意实数 b，函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\dfrac{3}{2}x+b$ 最多只有一个交点；

(3) 设 $g(x)=\log_4\left(a\cdot 2^x-\dfrac{4}{3}a\right)$，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个公共点，求实数 a 的取值范围.

14. 已知有穷数列 $\{a_n\}$ 共有 $2k$ 项（整数 $k\geq 2$），首项 $a_1=2$，设该数列的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}=(a-1)S_n+2$ $(n=1,2,\cdots,2k-1)$，其中常数 $a>1$.

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 若 $a=2^{\frac{2}{2k-1}}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)$ $(n=1,2,\cdots,2k)$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(3) 若 (2) 中的数列 $\{b_n\}$ 满足不等式 $\left|b_1-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_2-\dfrac{3}{2}\right|+\cdots+\left|b_{2k-1}-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_{2k}-\dfrac{3}{2}\right|\leq 4$，求 k 的值.

15. 设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+4^x\cdot a}{3}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，如果当 $x\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)$ 有意义，求 a 的取值范围.

16. 设 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 内是增函数.

(1) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内的单调性，并用函数单调性的定义予以证明；

(2) 设 $f(1)=0$，解关于 x 的方程 $f[\log_a(1-x^2)+1]=0$ $(a>1)$；

(3) 设 $m>0$，$n>0$，$f(mn)=f(m)+f(n)$，且 $f(-2)=-1$，求不等式 $\log_{\frac{1}{2}}|f(t)+1|>0$ 中 t 的取值范围.



第六讲　抽象函数的基本问题

知识点金

1．基本概念：抽象函数是指没有给出具体的函数解析式或图象，只给出一些函数符号及其满足某些条件，如函数的定义域、解析递推式、特定点的函数值、特定的运算性质等的函数．

2．处理方法：怎样求解抽象函数问题呢？我们可以利用特殊模型法、函数性质法、特殊化方法、联想类比转化法等多种方法从多角度、多层面去分析研究抽象函数问题．

①函数性质：函数的特征是通过其性质（如奇偶性、单调性、周期性、特殊点等）反映出来的，抽象函数也是如此，我们可以利用奇偶性整体思考；利用单调性等价转化；利用周期性回归已知；利用对称性数形结合；借助特殊点，布列方程等．

②特殊化方法：即根据已知条件而达到我们预期的目的进行适当的变换，其中包括式子的整体变换与具体数字的代换．如在求解函数解析式或研究函数性质时，一般用 x 换成 $-x$ 或将 x 换成其他代数式；在求函数值时，经常用特殊值 $0,-1,1$ 代入．

③研究抽象函数的具体模型．用具体模型解选择题、填空题，或由具体模型函数对综合题的解答提供思路和方法．如满足 $f(mn)=f(m)+f(n)$ 的函数可联想对数函数，满足 $f(m+n)=f(m)f(n)$ 的函数可联想指数函数．





例题精析

1. 与单调性奇偶性相关的问题

例1 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对于任意实数 m、n，均有 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>0$.

(1) 求证：$f(x)$ 是单调递增函数；

(2) 试举出一个具有这种性质的函数.

解 (1) 设 $x_2>x_1$，因为 $x_2=x_1+x_2-x_1$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+x_2-x_1)-f(x_1)$

$$=f(x_1)+f(x_2-x_1)-1-f(x_1)$$

$$=f(x_2-x_1)-1+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=f\left(x_2-x_1-\frac{1}{2}\right)>0$$

故 $f(x)$ 为单调递增函数.

(2) $f(x)=2x+1$

例2 设 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的函数，且 $f_1(x)$ 单调递增，设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，且对于在 $(0,+\infty)$ 上的任意两相异实数 x_1、x_2 恒有 $|f_1(x_1)-f_1(x_2)|>|f_2(x_1)-f_2(x_2)|$.

(1) 求证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 设 $F(x)=xf(x)$，$a>0$，$b>0$，求证：$F(a+b)>F(a)+F(b)$.

证明 (1) 设 $x_1>x_2>0$.

因为 $f_1(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f_1(x_1)-f_1(x_2)>0$，

所以 $|f_1(x_1)-f_1(x_2)|=f_1(x_1)-f_1(x_2)>0$，

因为 $|f_1(x_1)-f_1(x_2)|>|f_2(x_1)-f_2(x_2)|$，

所以 $f_1(x_2)-f_1(x_1)<f_2(x_1)-f_2(x_2)<f_1(x_1)-f_1(x_2)$，

所以 $f_1(x_1)+f_2(x_1)>f_1(x_2)+f_2(x_2)$，

所以 $f(x_1)>f(x_2)$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 因为 $F(x)=xf(x)$，$a>0$，$b>0$，

$a+b>a>0$，$a+b>b>0$，

$F(a+b)=(a+b)f(a+b)=af(a+b)+bf(a+b)$，



因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(a+b)>af(a)+bf(b)=F(a)+F(b)$

例 3 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

①值域为 $(-1,1)$，且当 $x>0$ 时，$-1<f(x)<0$；

②对于定义域内任意的实数 x,y，均满足：$f(m+n)=\dfrac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$。

试回答下列问题

(1)试求 $f(0)$ 的值；

(2)判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性；

(3)若函数 $f(x)$ 存在反函数 $g(x)$，求证：$g\left(\dfrac{1}{5}\right)+g\left(\dfrac{1}{11}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{1}{n^2+3n+1}\right)>g\left(\dfrac{1}{2}\right)$。

解 (1)在 $f(m+n)=\dfrac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$ 中，令 $m>0,n=0$，则有 $f(m)=\dfrac{f(m)+f(0)}{1+f(m)f(0)}$，即 $f(m)[1+f(m)f(0)]=f(m)+f(0)$ 也即 $f(0)[(f(m))^2-1]=0$。

由于函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$，所以 $[(f(m))^2-1]\neq 0$，所以 $f(0)=0$。

(2)函数 $f(x)$ 的单调性必然涉及到 $f(x)-f(y)$，于是，由已知 $f(m+n)=\dfrac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$，我们可以联想到：是否有

$$f(m-n)=\frac{f(m)-f(n)}{1-f(m)f(n)} \qquad (*)$$

成立？

这个问题实际上是：$f(-n)=-f(n)$ 是否成立？

为此，我们首先考虑函数 $f(x)$ 的奇偶性，也即 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。由于 $f(0)=0$，所以在 $f(m+n)=\dfrac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$ 中，令 $n=-m$，得 $f(m)+f(-m)=0$。所以，函数 $f(x)$ 为奇函数。故 $(*)$ 式成立。所以，$f(m)-f(n)=f(m-n)[1-f(m)f(n)]$。任取 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，故 $f(x_2-x_1)<0$ 且 $-1<f(x_2)f(x_1)<1$。所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)[1-f(x_2)f(x_1)]<0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减。

(3)由于函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以，函数 $f(x)$ 必存在反函数 $g(x)$，由原函数与反函数的关系可知 $g(x)$ 也为奇函数；$g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减；且当 $-1<x<0$ 时，$g(x)>0$。为了证明本题，需要考虑 $g(x)$ 的关系式。在 $(*)$ 式的两端，同时用 g 作用，得 $m-n=g\left[\dfrac{f(m)-f(n)}{1-f(m)f(n)}\right]$。



令 $f(m)=x$，$f(n)=y$，则 $m=g(x)$，$n=g(y)$，则上式可改写为 $g(x)-g(y)=g\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$.

不难验证，对于任意的 $x,y\in(-1,1)$，上式都成立（根据一一对应）.

这样，我们就得到了 $g(x)$ 的关系式，这个式子给我们以提示，即如果可以将 $\frac{1}{n^2+3n+1}$ 写成 $\frac{x-y}{1-xy}$ 的形式，则可通过裂项相消的方法化简求证式的左端.

事实上，由于

$$\frac{1}{n^2+3n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)-1}=\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{1-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+2}\right)},$$

所以 $g\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=g\left(\frac{1}{n+1}\right)-g\left(\frac{1}{n+2}\right)$.

所以 $g\left(\frac{1}{5}\right)+g\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)$

$$=\left[g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[g\left(\frac{1}{3}\right)-g\left(\frac{1}{4}\right)\right]+\cdots+\left[g\left(\frac{1}{n+1}\right)-g\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(-\frac{1}{n+2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$$

点评 一般来说，涉及函数奇偶性的问题，首先应该确定 $f(0)$ 的值.

2. 与函数的周期性相关的问题

例4 设 $f(x)$ 定义在 **R** 上且对任意的 x 有 $f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，求证：$f(x)$ 是周期函数，并找出它的一个周期.

分析 这同样是没有给出函数表达式的抽象函数，其一般解法是根据所给关系式进行递推，若能得出 $f(x+T)=f(x)$（T 为非零常数），则 $f(x)$ 为周期函数，且周期为 T.

证明 因为 $f(x)=f(x+1)-f(x+2)$， (1)

所以 $f(x+1)=f(x+2)-f(x+3)$. (2)

(1)+(2)得 $f(x)=-f(x+3)$， (3)

由(3)得 $f(x+3)=-f(x+6)$. (4)

由(3)和(4)得 $f(x)=f(x+6)$.

上式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，因此 $f(x)$ 是周期函数，且周期为6.

例5 设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且满足① $f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$，



②存在正常数 a，使 $f(a)=1$，求证：

(1) $f(x)$ 为奇函数；

(2) $f(x)$ 为周期函数，且一个周期为 $4a$.

证明 (1)令 $x=x_1-x_2$，

则 $f(-x)=f(x_2-x_1)=\dfrac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=-\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}=-f(x_1-x_2)$

$=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数

(2)因为 $f(x+a)=f[x-(-a)]=\dfrac{f(-a)f(x)+1}{f(-a)-f(x)}=\dfrac{-f(a)f(x)+1}{-f(a)-f(x)}=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$，

所以 $f(x+2a)=\dfrac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1}=\dfrac{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=-\dfrac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4a)=-\dfrac{1}{f(x+2a)}=-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 $4a$ 为周期的周期函数

例 6 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图像关于直线 $x=1$ 对称，对任何 $x_1,x_2\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，又 $f(1)=a>0$.

(1)求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$；

(2)证明：$f(x)$ 是周期函数；

(3)证明：$x\in\mathbf{R}$ 时，均有 $f(x)>0$；

(4)若 $a_n=f\left(2n+1+\dfrac{1}{2n+1}\right)$，$b_n=f\left(2n+\dfrac{1}{n}+1\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解 (1)因为 $x_1,x_2\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 时，$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，

所以 $f(x)=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant 0$，$x\in[0,1]$.

所以 $f(1)=\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]^2$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left[f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right]^2$，因为 $f(1)=a>0$，

所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=a^{\frac{1}{4}}$.

(2)由已知得 $f(1+x)=f(1-x)$ 且 $f(-x)=f(x)$，

所以 $f(x+2)=f[1+(1+x)]=f[1-(1+x)]=f(-x)=f(x)$.



所以 $f(x)$ 为周期函数，且 2 为一个周期.

(3) 任取 $x\in[0,1]$，$\frac{x}{2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，则 $f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant 0$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以对 $x\in[-1,0]$，均有 $f(x)=f(-x)\geqslant 0$.

又 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，则对任意 $x\in\mathbf{R}$，总存在 $k\in\mathbf{Z}$，

使 $x\in[-1+2k,1+2k]$，这里 $f(x)=f(x-2k)\geqslant 0$.

所以对一切 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(x)\geqslant 0$.

(4) 因为 $a_n=f\left(2n+1+\frac{1}{2n+1}\right)=f\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=f\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=f\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]^{2n}$.

而 $f(1)=f\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right]^{2n+1}$，所以 $f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=a^{\frac{1}{2n+1}}$.

所以 $a_n=a^{\frac{2n}{2n+1}}$.

$b_n=f\left(2n+\frac{1}{n}+1\right)=f\left(\frac{1}{n}+1\right)=f\left(1-\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-1}$.

而 $f(1)=f\left(\frac{n}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$，所以 $f\left(\frac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}}$，所以 $b_n=a^{\frac{n-1}{n}}$.

3. 在特定的定义域下求函数的解析式

例 7 函数 $y=f(x)$ 满足① $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$，② $f(4)=16$，m、n 为互质整数，$n\neq 0$，求 $f\left(\frac{m}{n}\right)$ 的值.

解 因为 $f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0)=f^2(0)$，

所以 $f(0)=0$ 或 1. 若 $f(0)=0$ 则 $f(4)=16=f(0+4)=f(0)\cdot f(4)=0$.（矛盾）

所以 $f(0)=1$.

因为 $f(4)=f(2)\cdot f(2)=f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)=16$，

$f(1)=f^2\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$，

所以 $f(1)=2$. 仿此可证得 $f(a)\geqslant 0$，即 $y=f(x)$ 是非负函数.

$f(0)=f(a+(-a))=f(a)\cdot f(-a)$，

所以 $f(-a)=\frac{1}{f(a)}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(n)=f^n(1)=2^n$，$f(-n)=2^{-n}$，

$f(1)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=f^n\left(\frac{1}{n}\right)=2$，



所以 $f\left(\frac{1}{n}\right)=2^{\frac{1}{n}}$,

所以 $f\left(\frac{m}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{m}=2^{\frac{m}{n}}$.

例 8 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.

(1)若 $f(2)=3$,求 $f(1)$;又若 $f(0)=a$,求 $f(a)$;

(2)设有且仅有一个实数 x_0,使得 $f(x_0)=x_0$,求函数 $f(x)$ 的解析表达式.

解 (1)因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$,

所以 $f(f(2)-2^2+2)=f(2)-2^2+2$.

又由 $f(2)=3$,得 $f(3-2^2+2)=3-2^2+2$,即 $f(1)=1$.

若 $f(0)=a$,则 $f(a-0^2+0)=a-0^2+0$,即 $f(a)=a$.

(2)因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.

又因为有且只有一个实数 x_0,使得 $f(x_0)=x_0$,

所以对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)-x^2+x=x_0$.

在上式中令 $x=x_0$,有 $f(x_0)-x_0^2+x_0=x_0$.

又因为 $f(x_0)=x_0$,所以 $x_0-x_0^2=0$,故 $x_0=0$ 或 $x_0=1$.

若 $x_0=0$,则 $f(x)-x^2+x=0$,即 $f(x)=x^2-x$.

但方程 $x^2-x=x$ 有两个不相等的实根,与题设条件矛盾,故 $x_0\neq0$.

若 $x_0=1$,则有 $f(x)-x^2+x=1$,即 $f(x)=x^2-x+1$.易验证该函数满足题设条件.

综上,所求函数解析式为 $f(x)=x^2-x+1\ (x\in\mathbf{R})$.

例 9 已知函数 $f(x)$ 满足对任意实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+1$,且 $f(-2)=-2$.

(1)求 $f(1)$ 的值;

(2)证明:对一切大于 1 的正整数 t,恒有 $f(t)>t$;

(3)试求满足 $f(t)=t$ 的整数的个数,并说明理由.

(1)**解** 令 $x=y=0$,得 $f(0)=-1$.令 $x=y=-1$,因为 $f(-2)=-2$,所以 $f(-1)=-2$.

令 $x=1$,$y=-1$,得 $f(0)=f(1)+f(-1)$,所以 $f(1)=1$.

(2)**证明** 令 $x=1$,得 $f(y+1)-f(y)=y+2$.

故当 $y\in\mathbf{N}^*$ 时,有 $f(y+1)-f(y)>0$.

由 $f(y+1)>f(y)$,$f(1)=1$ 可知,对一切正整数 y 都有 $f(y)>0$.

当 $y\in\mathbf{N}^*$ 时,$f(y+1)=f(y)+y+2=f(y)+1+y+1>y+1$.

故对一切大于 1 的正整数,恒有 $f(t)>t$.

(3)**解** 由 $f(y+1)-f(y)=y+2$ 及(1)可知 $f(-3)=-1$,$f(-4)=1$



下面证明 $t\leqslant-4$ 时，$f(t)>t$.

因为 $t\leqslant-4$，所以 $-(t+2)\geqslant2>0$

所以 $f(t)-f(t-1)=-(t+2)>0$.

即 $f(-5)-f(-4)>0$，

同理可得 $f(-6)-f(-5)>0$，…，$f(t+1)-f(t+2)>0$，$f(t)-f(t+1)>0$

将上述不等式相加得 $f(t)>f(-4)=1>-4$.

因为 $t\leqslant-4$，所以 $f(t)>t$

综上所述，满足条件的整数只有两个：1 和 -2



思考交流

思考题1　若二次三项式 $P(x)=x^2+ax+b$ 和 $Q(x)=x^2+cx+d$ 满足方程：$P(Q(x))=Q(P(x))$ 没有实根，证明 $b\neq d$.

证明　若不然，设 $P(x)=x^2+ax+b$，$Q(x)=x^2+cx+b$.

代入 $P(Q(x))=Q(P(x))$，

展开并化简，得 $(a-c)[2x^3+(a+c-1)x^2+2bx-b]=0$.

若 $a=c$，则 x 取任意实数时，x 都是 $P(Q(x))=Q(P(x))$ 的根

若 $a\neq c$，则 $P(Q(x))=Q(P(x))$ 可化为

$2x^3+(a+c-1)x^2+2bx-b=0$.

显然，这个三次方程一定有实数根，与题设矛盾.

所以，$b\neq d$.

思考题2　设 $Q_1=\{x\in \mathbf{Q}|x\geqslant1\}$，函数 $f:Q_1\to\mathbf{R}$ 满足对于任意的 $x,y\in Q_1$，不等式

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

成立，其中 $\varepsilon>0$ 是一个实数

证明：存在实数 q，对所有实数 $x\in Q_1$，满足 $\left|\frac{f(x)}{x}-q\right|<2\varepsilon$

证明　首先证明：对于任意的 $n\in\mathbf{N}$ 和所有有理数 $x\geqslant1$，有

$$nf(x)-(n-1)\varepsilon\leqslant f(nx)\leqslant nf(x)+(n-1)\varepsilon. \quad ①$$

当 $n=1$ 时，结论显然成立

假设 $n=k$ 时结论成立

当 $n=k+1$ 时，由条件可知对所有 $x,y\in Q_1$，有

$f(x)+f(y)-\varepsilon<f(x+y)<f(x)+f(y)+\varepsilon$



取 $y=kx$，则有 $f(x)+f(kx)-\varepsilon<f((k+1)x)<f(x)+f(kx)+\varepsilon$.

由归纳假设，有

$f(kx)+f(x)-\varepsilon>kf(x)-(k-1)\varepsilon+f(x)-\varepsilon=(k+1)f(x)-k\varepsilon$,

$f(kx)+f(x)+\varepsilon<kf(x)+(k-1)\varepsilon+f(x)+\varepsilon=(k+1)f(x)+k\varepsilon$

所以，$n=k+1$ 时结论也成立.

因此，式①对所有 $n\in\mathbf{N}$ 和所有有理数 $x>1$ 成立.

在①式中令 $x=1$，有

$nf(1)-(n-1)\varepsilon\leqslant f(n)\leqslant nf(1)+(n-1)\varepsilon$ ②

在①式设 $x=\frac{m}{n}$，其中 $m,n\in\mathbf{N},m>n$，有

$nf\left(\frac{m}{n}\right)-(n-1)\varepsilon\leqslant f(m)\leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)+(n-1)\varepsilon$，

于是可得 $f(m)-(n-1)\varepsilon\leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)\leqslant f(m)+(n-1)\varepsilon$.

由②式，有 $mf(1)-(m+n-2)\varepsilon\leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)\leqslant mf(1)+(n+m-2)\varepsilon$

两边同时除以 m，且设 $x=\frac{m}{n}$，则有

$\left|\frac{f(x)}{x}-f(1)\right|\leqslant\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{m}\right)\varepsilon<\left(1+\frac{1}{x}\right)\varepsilon<2\varepsilon$

设 $q=f(1)$，原不等式成立.

同步检测 6

1. 已知函数 $f(x)$ 对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 不能等于……………………( )

A. $\frac{n(n+1)}{2}f(1)$ B. $f\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ C. $n(n+1)$ D. $n(n+1)f(1)$

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上恒不为零的函数，对任意实数 x、$y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)f(y)=f(x+y)$，若 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的取值范围是……………………( )

A. $\left[\frac{1}{2},2\right)$ B. $\left[\frac{1}{2},2\right]$ C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$ D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

3. 定义在定义域 D 内的函数 $y=f(x)$，若对任意的 $x_1,x_2\in D$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<$



，则称函数 $y=f(x)$ 为“Storm 函数”．函数 $f(x)=x^3-x+a(x\in[-1,1],a\in\mathbf{R})$ 是否为“Storm 函数”？如果是，请给出证明；如果不是，请说明理由．

4．如果函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数，那么函数 $y=f(2x)$ 的图象的一条对称轴是直线（　　）

A．$x=-1$　　　B．$x=1$　　　C．$x=-\frac{1}{2}$　　　D．$x=\frac{1}{2}$

5．若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数，且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是（　　）

A．$x^2+x-\frac{1}{5}$　　　B．$x^2+x+\frac{1}{5}$　　　C．$x^2-\frac{1}{5}$　　　D．$x^2+\frac{1}{5}$

6．已知函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上，且对一切实数 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(0)\neq0$．

(1)求证：$f(0)=1$，且 $f(x)$ 是偶函数；

(2)若存在常数 c，使 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$．

①求证：对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+c)=-f(x)$ 成立；

②试问：函数 $f(x)$ 是否是周期函数？若是，求出它的一个周期．

7．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意实数 m,n，总有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，且当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$．

(1)试求 $f(0)$ 的值；

(2)判断 $f(x)$ 的单调性并证明你的结论；

(3)设 $A=\{(x,y)\mid f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)\}$，$B=\{(x,y)\mid f(ax-y+\sqrt{2})=1,a\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，试确定 a 的取值范围．

(4)试举出一个满足条件的函数 $f(x)$．

8．设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 对于任意 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立，且 $f(1)=-2$，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$．

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性，并加以证明．

(2)试问：当 $-2003\leqslant x\leqslant2003$ 时，$f(x)$ 是否有最值？如果有，求出最值；如果没有，说明理由．

(3)解关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}f(bx^2)-f(x)>\frac{1}{2}f(b^2x)-f(b)$，其中 $b^2\geqslant2$．

9．已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对于一切实数 x 满足

$f(x+2)=f(2-x)$，$f(x+7)=f(7-x)$．

(1)求证：$f(4-x)=f(x)$，$f(14-x)=f(x)$；



(2)试问 $y=f(x)$ 是否为周期函数，若不是，说明理由；若是，求出它的一个周期.

(3)已知 $x\in[2,7]$ 时，$f(x)=x$，求当 $x\in[16,20]$ 时，函数 $y=f(x)$ 的表达式，并求此时 $f(x)$ 的最大值和最小值.

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数，且对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$ 都满足 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$.

(1)求 $f(0)$，$f(1)$ 的值；

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

(3)若 $f(2)=2$，$u_n=\frac{f(2^{-n})}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n.

11. 已知函数 $f(x)=\frac{x+1-a}{a-x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)证明：函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,-1)$ 成中心对称图形；

(2)当 $x\in[a+1,a+2]$ 时，求证：$-2\leqslant f(x)\leqslant-\frac{3}{2}$；

(3)我们利用函数 $y=f(x)$ 构造一个数列 $\{x_n\}$，方法如下：对给定的定义域中的 x_1，令 $x_2=f(x_1)$，$x_3=f(x_2)$，…，$x_n=f(x_{n-1})$，…，在上述构造过程中，如果 $x_i(i=2,3,4,\cdots)$ 在定义域中，构造的过程将继续下去；否则将停止.

①如果可以用上述方法构造出一个常数列 $\{x_n\}$，求实数 a 的取值范围；

②如果取定义域中的任一值作为 x_1，都可以用上述方法构造出一个无穷数列 $\{x_n\}$，求实数 a 的值.

12. A 是定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合：①对任意的 $x\in[1,2]$，都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$；②存在常数 $L(0<L<1)$，使得对任意的 $x_1,x_2\in[1,2]$，都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$.

(1)设 $\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+x}$，$x\in[2,4]$，证明：$\varphi(x)\in A$；

(2)设 $\varphi(x)\in A$，如果存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $x_0=\varphi(2x_0)$，那么这样的 x_0 是唯一的；

(3)设 $\varphi(x)\in A$，任取 $x_1\in(1,2)$，令 $x_{n+1}=\varphi(2x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：给定正整数 k，对任意的正整数 p，不等式 $|x_{k+p}-x_k|\leqslant\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$ 成立.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$.

(1)试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(2)试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005,2005]$ 上的根的个数，并证明你的结论.

14. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数，且满足条件：

① $f(-1)=f(1)=0$，



②对于任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leq|u-v|$.

(1)证明：对任意的 $x\in[-1,1]$，都有 $x-1\leq f(x)\leq 1-x$;

(2)证明：对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leq 1$;

(3)在区间 $[-1,1]$ 上是否存在满足题设条件的奇函数 $y=f(x)$，且使得

$$\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|, & \text{当 } u,v\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ |f(u)-f(v)|=|u-v|, & \text{当 } u,v\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

若存在，则举出例子；若不存在，说明理由.



第七讲 函数方程

知识点金

在18世纪初期，欧拉(L. Euler)、拉格朗日(Lagrange)等数学大师就已经利用函数方程解决问题了. 数学家柯西(A. L. Cauchy)曾对下面的一系列函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$作了深入的研究，并首创了一种求解函数方程的方法——柯西(Cauchy)法. 函数方程在数学奥林匹克中也有一席之地. 本讲将介绍几种求解函数方程的方法.

例题精析

1. 代换法

例1 求函数方程 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^3+x^2-3x+2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ 的解.

解 原式右边可化为：

$$x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4,$$

所以 $f(x)=x^3+x^2+4$.

例2 求函数方程

$$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\sin x\quad(x>0)\qquad①$$



在$(0,+\infty)$上的解

解 将已知式中的 x 换成 $\frac{1}{x}$，得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(x)=\sin\frac{1}{x}$。

两边同乘以 $\frac{x}{2}$，得 $\frac{1}{2}f(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{2}\sin\frac{1}{x}$。 ②

①－②得 $f(x)=\frac{2}{3}\left(\sin x-\frac{x}{2}\sin\frac{1}{x}\right)$。

例 3 求解函数方程

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\cos x,\ (x\neq 0,\pm 1) \quad ①$$

解 令 $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$，易知

$g^2(x)=g(g(x))=-\frac{1}{x}$，$g^3(x)=g(g(g(x)))=\frac{1+x}{1-x}$，$g^4(x)=x$，于是①即为

$$f(g(x))+f(g^2(x))+f(g^3(x))=\cos x. \quad ②$$

将②中的 x 换为 $g(x)$，则有

$$f(g^2(x))+f(g^3(x))+f(x)=\cos g(x). \quad ③$$

又将③中的 x 换为 $g(x)$，故

$$f(g^3(x))+f(x)+f(g(x))=\cos g^2(x). \quad ④$$

同理有 $f(x)+f(g(x))+f(g^2(x))=\cos g^3(x)$. ⑤

③＋④＋⑤－2×②，得

$$3f(x)=\cos g(x)+\cos g^2(x)+\cos g^3(x)-2\cos x.$$

所以 $f(x)=\frac{1}{3}\left[\cos\frac{x-1}{x+1}+\cos\frac{1}{x}+\cos\frac{1+x}{1-x}-2\cos x\right]$.

点评 我们规定：$f^0(x)=x$，$f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$.

如果 $f^m(x)=x$ 对一切 $f^k(x)$ 有定义的 x，且 $f^k(x)\neq x$，$k=1,2,\cdots,m-1$，则称 $f(x)$ 有迭代周期 m.

对于函数方程 $a_0(x)g(x)+a_1(x)g(f(x))+\cdots+a_{m-1}(x)g(f^{m-1}(x))=b(x)$，当 $f(x)$ 具有迭代周期 m 时，则可将上式中的 x 分别以 $f(x),f^2(x),\cdots,f^{m-1}(x)$ 代换，得到 m 个方程，然后，再求出 $f(x)$.

对于分式线性函数

$$f(x)=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{p}\right)x-\sin\frac{2\pi}{p}}{\left(\sin\frac{2\pi}{p}\right)x+\cos\frac{2\pi}{p}}$$

我们可以验证 $f^p(x)=x$



例4 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意的实数 x,y，都有

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \qquad ①$$

解 令 $x=y\neq 0$，得 $f(0)=0$.

设 $u=x+y$，$v=x-y$，那么

$$\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2}, \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

于是①变为 $vf(u)-uf(v)=uv(u^2-v^2)$.

若 $uv\neq 0$，则上式为 $\dfrac{f(u)}{u}-\dfrac{f(v)}{v}=u^2-v^2$.

即对任意非零实数 u,v，有 $\dfrac{f(u)}{u}-u^2=\dfrac{f(v)}{v}-v^2$

所以 $\dfrac{f(x)}{x}-x^2=c$ 为一常数，$x\neq 0$.

于是对 $x\in\mathbf{R}$，所求函数为

$f(x)=x^3+cx$，其中 c 为常数.

经验证：$f(x)=x^3+cx$ （c 是常数）是欲求的函数

例5 已知函数 $f:A\to A$（其中 $A=\{x\mid x\geqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$）满足：

(1) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$；

(2) $f(2)=0$；

(3) 当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)\neq 0$. 求函数 $f(x)$

解 当 $x>2$ 时，令 $x=2+t(t>0)$，有

$f(tf(2))f(2)=f(t+2)=f(x)$

因为 $f(2)=0$，所以 $f(x)=0(x\geqslant 2)$.

当 $0\leqslant x<2$ 时，令 $x+t=2(t>0)$，有

$0=f(2)=f(x+t)=f(tf(x))f(x)$.

又因为 $f(tf(x))=0$，故 $tf(x)\geqslant 2$，即

$$f(x)\geqslant \frac{2}{t}=\frac{2}{-x+2}$$

但 $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$ 在 $x\in[0,2)$ 时不成立.

若有 $x_1\in[0,2)$，且 $f(x_1)>\dfrac{2}{2-x_1}$.

则可得 $f(x_1)(2-x_1)>2$



这时总可以找到 $y<2-x_1$，使 $f(x_1)\cdot y\geqslant 2$，故

$f(yf(x_1))=0$，

亦即 $f(x_1+y)=f(yf(x_1))f(x_1)=0$.

此式与 $x_1+y\geqslant 2$ 矛盾，即 $f(x)\leqslant\frac{2}{2-x}$.

从而 $f(x)=\begin{cases}0, & 当\ x\geqslant 2\ 时,\\ \frac{2}{2-x}, & 当\ 0\leqslant x<2\ 时\end{cases}$

例 6 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意的 x、y 均有

$f(f(x)+y)=2x+f(f(f(y))-x)$

解 令 $y=0$，有 $f(f(x))=2x+f(f(f(0))-x)$， ①

再令 $x=0$，即有 $f(f(0))=f(f(f(0)))$

在①中，令 $x=f(f(0))$，

$f(f(f(f(0))))=2f(f(0))+f(0)$，

所以 $f(f(0))=2f(f(0))+f(0)$

所以 $f(f(0))=-f(0)$，

这样 $f^{(k)}(0)=-f(0)\quad(k\geqslant 2)$，

又在原式中，令 $x=0$，$y=-f(0)$，

有 $f(0)=-2f(0)+f(f(f(-f(0))))$

$\quad=-2f(0)+f(f(f(f(f(0)))))$

$\quad=-2f(0)-f(0)=-3f(0)$，

由此知 $f(0)=0$.

这样易得 $f(f(x))=2x+f(-x)$，(由①得) ②

又在原式中令 $x=0$，

$f(y)=f(f(f(y)))$，

所以 $f(0)+f(f(f(y)))=2f(y)+f(-f(y))$

于是 $f(-f(y))=-f(y)$，

而 $f(0)=2x+f(f(f(-f(x)))-x)$，

故 f 为满射，故 $f(x)=x$，经检验满足方程

2 不动点法

设 $f:A\to B$，若存在一点 $x_0\in A$，使得 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 在集合 A 中的不动点

利用函数的不动点求解函数方程，是一种很重要的有效方法.

例 7 已知 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 且满足条件：



(1)对任意 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$f(xf(y))=yf(x)$；

(2)$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to0$.

试求函数 $f(x)$.

解 令 $x=y$，有 $f(xf(x))=xf(x)$.

可见 $xf(x)$ 是 f 的不动点，其不动点集为 $\{xf(x);x\in\mathbf{R}^+\}$

再令 $x=y=1$，代入条件(1)，有 $f(f(1))=f(1)$.

又 $x=1,y=f(1)$，代入原方程式 $f(f(1))=f^2(1)$.

所以 $f^2(1)=f(1)$.

故 $f(1)=1$（$f(1)=0$ 舍去），这说明 1 是 f 的不动点，故 $xf(x)=1$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x\in\mathbf{R}^+$.

以下用反证法证明 f 的不动点是唯一的．假设有 $a\neq1$ 且 $a=f(a)$

①若 $a>1$，由 $f(xf(x))=xf(x)$，令 $x=a$，可得

$f(af(a))=af(a)$，故 $f(a^2)=a^2$，所以 $f(a^4)=a^4$，……　$f(a^{2^n})=a^{2^n}$.

而这与 $x\to+\infty$，$f(x)\to0$ 矛盾

②若 $0<a<1$，则由

$1=f(1)=f\left(\dfrac{1}{a}\cdot a\right)=f\left(\dfrac{1}{a}f(a)\right)=af\left(\dfrac{1}{a}\right)$，

得 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}$，

这与 $a=f(a)$ 且 $0<a<1$ 矛盾.

于是 $f(x)$ 只有一个不动点.

例 8 设非空集合 $G=\{f(x)\mid f(x)=ax+b,a,b\in\mathbf{R},a\neq0\}$ 满足：

(1)若 $f(x),g(x)\in G$，则 $f(g(x))\in G$；

(2)若 $f(x)\in G$，则 $f^{-1}(x)\in G$；

(3)对每一个 $f(x)$，有一个 x_f，使 $f(x_f)=x_f$.

求证存在 k，对一切 $f\in G$，有 $f(k)=k$

证明 若 $f(x)=ax+b$，不动点为 $x_f=ax_f+b$.

所以 $x_f=\dfrac{-b}{a-1}(a\neq1)$.

（当 $a=1$ 时，如果 $b\neq0$，$f(x)$ 没有不动点，在 $b=0$ 时，有无穷多个不动点，因此不予讨论）

若证得对任意的 $f(x)=ax+b$，$\dfrac{b}{a-1}$ 是一个常数即可.

事实上，可设 $a\neq1$，若 $f(x)=a_1x+b_1$，$g(x)=a_2x+b_2\in G$，考虑



$f^{-1}(g(x))=\frac{g(x)-b}{a}=\frac{ax+b_1-b}{a}=x+\frac{b_1}{a}-\frac{b}{a}\in G$

故 $b_1=b_2$（否则 $b_1-b_2\neq0$，则 $x+\frac{b_1-b_2}{a}\notin G$）.

任取 $f_1(x)=a_1x+b_1$，$f_2(x)=a_2x+b_2\in G$.

只要求证明 $\frac{b_1}{a_1-1}=\frac{b_2}{a_2-1}$，考虑

$f_1(f_2(x))=a_1(a_2x+b_2)+b_1=a_1a_2x+a_1b_2+b_1\in G$，

$f_2(f_1(x))=a_2a_1x+a_2b_1+b_2\in G$.

从而 $a_1b_2+b_1=a_2b_1+b_2$.

所以 $\frac{b_1}{a_1-1}=\frac{b_2}{a_2-1}$

3. 赋值法

例9　设有界函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，且有 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)f(n)$，试求 $f(m)$

解　令 $m=n=0$，有 $2f(0)=2f^2(0)$，

则 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

(1)当 $f(0)=0$，令 $n=0$，

所以 $2f(m)=2f(0)f(m)=0$.

所以 $f(m)=0\quad(m\in\mathbf{Z})$.

(2)若 $f(0)=1$，令 $m=0$，有 $f(n)+f(-n)=2f(0)f(n)$，

即 $f(n)=f(-n)$.

故知 $f(n)$ 为偶函数

再令 $n=m$，有 $f(2m)=2f^2(m)-1$.

我们首先证明对一切 m，$|f(m)|\leq1$，不然，设存在整数 k，使 $|f(k)|>1$，则

$f(2k)=2f^2(k)-1>|f(k)|\geq f(k)$.

所以 $f(k)<f(2k)<f(4k)<\cdots<f(2^nk)<\cdots$.

f 为整数且越来越大，必将有 $f\to+\infty$，与题设矛盾，故一定有 $|f(k)|\leq1$

又因为 f 为整数，所以 $f\in\{-1,0,1\}$.

①若 $f(1)=0$，令 $n=1$，有 $f(m+1)+f(m-1)=0$.

取 $m=2$，有 $f(3)+f(1)=0$，即 $f(3)=0$，从而有

$f(5)=0$，$f(7)=0$，…，$f(-1)=0$，$f(-3)=0$

又 $f(0)=1$，故 $f(2)=-1$，$f(4)=1$

所以 $f(m)=\begin{cases}0, & m\equiv1\pmod2\\ 1, & m\equiv0\pmod4\\ -1, & m\equiv2\pmod4\end{cases}$



②当 $f(1)=1$,同理可得 $f(m)\equiv 1$

③当 $f(1)=-1$, $f(m)=\begin{cases}1, & m\equiv 0(\bmod 2)\\ -1, & m\equiv 1(\bmod 2)\end{cases}$

例 10 求函数 $f:N^*\to N^*$,满足下列条件:

(1) $f(2)=2$;

(2) $f(mn)=f(m)\cdot f(n)$ 对所有 $m,n\in N^*$ 且 $\gcd(m,n)=1$ 成立,这里 $\gcd(m,n)$ 表示 m,n 的最大公约数;

(3) 若 $m<n$,则 $f(m)<f(n)$.

解 取 $m=n=1$,代入得 $f(1)=f(1\cdot 1)=[f(1)]^2$,

所以 $f(1)=1$

又 $f(3)\cdot f(5)=f(15)<f(18)=f(2\cdot 9)=f(2)\cdot f(9)=2f(9)$. ①

以及 $f(9)<f(10)=f(2\cdot 5)=f(2)\cdot f(5)=2f(5)$. ②

由①②知 $f(3)f(5)<2f(9)<4f(5)$.

所以, $f(3)<4$.

而 $2=f(2)<f(3)<4$,故而有 $f(3)=3$.

因为 $f(6)=f(2)f(3)=6$.

而 $3=f(3)<f(4)<f(5)<f(6)=6$,

可得 $f(4)=4$, $f(5)=5$

由于对任何正整数 $k\geqslant 2$, $\gcd(k-1,k)=1$.

下面我们用数学归纳法证明 $f(n)=n$.

假设对于 $k\leqslant n$ 时, $f(k)=k$

由已知得 $f((n-1)n)=f(n-1)f(n)=(n-1)n$.

由(3),有

$$n=f(n)<f(n+1)<f(n+2)<\cdots<f(n^2-n-1)<f(n^2-n)=f((n-1)n)$$
$$=(n-1)n$$

从上式不难发现 $f(n+1)=n+1$, $f(n+2)=n+2$, $\cdots$, $f((n-1)n-1)=(n-1)n-1$.

所以 $f((n-1)n)=(n-1)n$.

因此, $f(n)=n$ 对一切 $n\in N^*$ 成立.

例 11 解函数方程:对任意 $x,y\in R$,都有

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$.

解 令 $x=0$, $y=t$,得 $f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t$. ①

令 $x=\frac{\pi}{2}+t$, $y=\frac{\pi}{2}$,得 $f(\pi+t)+f(t)=0$. ②



再令 $x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t$，得 $f(\pi+t)+f(-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t$ ③

①+②-③，得 $2f(t)=2f(0)\cos t+2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t$.

所以 $f(x)=f(0)\cos x+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$.

其中 $f(0)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 为常数，经验证 $f(x)=a\cos x+b\sin x$（a,b 为常数）为方程的解

4. 构造法

例 12 是否存在函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，使对任意的 $n\in\mathbf{N}$，有 $f(f(n))=n^2$

解 设数列 $n_1=2, n_2=3, n_3=5,\cdots$ 依次递增且取遍所有不是整数平方的自然数，令 $n_{k,m+1}=(n_{k,m})^2$。

且对每个自然数 $n>1$ 都对应唯一一个数对 k,m，使得 $n=n_{k,m}$，从而可作函数 $f(n)$ 如下：

$f(1)=1$

$$f(n_{k,m})=\begin{cases} n_{k+1,m}，当 k 为奇数时, \\ n_{k-1,m+1}，当 k 为偶数时\end{cases}$$

其中 $k\in\mathbf{N}, m\geq 0$ 是整数，则不难验证，对任意 $n\in\mathbf{N}$，有 $f(f(n))=n^2$.

例 13 试问是否存在函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 满足下面三个条件：

(1) $f(1)=2$；

(2) $f(f(n))=f(n)+n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立；

(3) $f(n)<f(n+1)$

解 满足题目要求的函数存在，下面我们来构造一个特解.

对于满足题目条件的 f，$\forall a\in\mathbf{N}$，记 $f(a)=b$，则由条件(2)，有

$f(b)=f(f(a))=f(a)+a=a+b$.

又由条件(1)，$f(1)=2$，得 $f(2)=3, f(3)=5, f(5)=8,\cdots$

一般地，若以 b_n 表示满足 $b_1=1, b_2=2, b_{n+2}=b_n+b_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 的 Fibonacci 数列，则 $f(b_n)=b_{n+1}$.

另一方面，$\{b_n\}$ 的通项公式

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

因此，b_n 近似等于 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$，这样 b_{n+1} 与 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}b_n$ 也很接近，进行估算：

$$\left|b_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}b_n\right|$$



$$\leqslant\frac{1}{\sqrt5}\left|\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2}+\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right|<\frac{1}{2},$$

这说明 b_{n+1} 是与 $\frac{1+\sqrt5}{2}b_n$ 最接近的整数，注意到与 x 最接近的整数是 $\left[\frac{1}{2}+x\right]$，故 f 应满足 $f(b_n)=b_{n+1}=\left[\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}b_n\right]$，从而我们会想到函数 $f(n)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}n\right]$ 可能是一个特解（这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）.

事实上，$f(1)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}\right]=1+\left[\frac{\sqrt5}{2}\right]=2$，(1)成立.

$$\begin{aligned}f(n+1)&=\left[\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}(n+1)\right]\\&=\left[\frac{1+\sqrt5}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}n\right)\right]\\&\geqslant\left[1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}n\right)\right]=1+f(n)>f(n)\text{，(3)成立.}\end{aligned}$$

注意到 $f(f(n))=\left[\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt5}{2}f(n)\right]=f(n)+\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5-1}{2}f(n)\right]$，

而 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5+1}{2}n<f(n)<\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5+1}{2}n$，

所以 $-\frac{\sqrt5-1}{4}+n<\frac{\sqrt5-1}{2}f(n)<\frac{\sqrt5-1}{4}+n$，

于是 $n<\frac{3-\sqrt5}{4}+n<\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5-1}{2}f(n)<\frac{\sqrt5+1}{4}+n<n+1$.

这样 $\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5-1}{2}f(n)\right]=n$，故 $f(f(n))=f(n)+n$，

故(2)成立.

综上可知 $f(n)=\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt5+1}{2}n\right]$ 是一个特解.

5. 辅助函数法

例 14 若 $p(x)$ 表示 x 的 n 次多项式，且当 $k=0,1,2,\cdots,n$ 时，$p(k)=\frac{k}{k+1}$，试求 $p(kx)$ 的表达式.

解 因为 $p(k)=\frac{k}{k+1}$，

故 $(k+1)p(k)-k=0$.



令 $Q(x)=(x+1)p(x)-x$. ①

显然 $Q(x)$ 是 x 的 $n+1$ 次多项式，从已知条件知，它有 $n+1$ 个根 $0,1,2,\cdots,n$，故可设

$Q(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$. ②

令 $x=-1$ 代入①，得 $Q(-1)=1$.

代入②得 $Q(-1)=(-1)^{n+1}\cdot a\cdot(n+1)!$

从而 $(-1)^{n+1}\cdot a\cdot(n+1)!=1$.

由此，得 $a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

故 $Q(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)\cdots(x-n)$.

那么 $p(x)=\frac{Q(x)+x}{x+1}$

$$=\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+(n+1)!\,x}{(n+1)!\,(x+1)}$$

例 15 设 $f(x)$ 为定义在 $[0,1]$ 上的连续函数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，且对任何 $x\in(0,1)$，存在 h，当 $0\leqslant x-h<x+h\leqslant 1$ 时，

$f(x)=\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$. ①

试证明：对任意的 $x\in[0,1]$ 都有 $f(x)=x$.

解 作辅助函数

$F(x)=f(x)-x$.

则 $F(0)=F(1)=0$，此外，F 满足与 f 相同的条件．若 $F(x)$ 的最大值 $M>0$，令 $x_0=\inf\{x\mid F(x)=M\}$，由于 F 连续，故 $F(x_0)=M>0$. 因此 $x_0>0$，于是存在 h，$0\leqslant x_0-h<x_0+h\leqslant 1$，使

$F(x_0)=\frac{F(x_0-h)+F(x_0+h)}{2}$. ②

由于 M 是最大值，所以 $F(x_0\pm h)\leqslant M$，又由 x_0 的定义知，$F(x_0-h)<M$，于是由②知 $M=0$.

同理可证 $F(x)$ 的最小值为 0.

因此，对任何 $x\in[0,1]$ 有 $f(x)=x$.

6. 柯西法

例 16 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，并且对任意的 x,y，有

$f(x+y)=f(x)f(y)$. ①

证明 $f(x)$ 必为指数函数 a^x（其中 a 为某一正数），或 $f(x)$ 恒等于零

证明 形如 $f(x)=a^x\ (a>0)$ 的指数函数显然满足①式．现在要证明满足①式的连续



函数，除非 $f(x)\equiv 0$，否则必存在正数 a，使得 $f(x)=a^x$.

对任意实数 x，有 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant 0$

若有一点 x_0，使 $f(x_0)=0$，则对任意实数 x，有

$f(x)=f(x-x_0)f(x_0)=0$

因而当 $f(x)\neq 0$ 时，必有 $f(x)>0$.

由①式容易得(可用数学归纳法证明)：对任意正整数 n，有

$f(nx)=[f(x)]^n$. ②

把上式中的 x 换为 $\frac{x}{n}$，则 $f(x)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n$，从而

$f\left(\frac{x}{n}\right)=[f(x)]^{\frac{1}{n}}$.

在这个结果中用 mx 代换 x 并用②式，得

$f\left(\frac{mx}{n}\right)=[f(mx)]^{\frac{1}{n}}=[f(x)]^{\frac{m}{n}}$.

这证明了关系式 $f(rx)=[f(x)]^r$ ③

对正有理数 r 及任意实数 x 成立.

在③式中，让 r 取一个正的递减而趋于0的数列，取极限(固定 x，让 r 按上述方式趋于0)，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得

$f(0)=[f(x)]^0=1$

在①式中令 $y=-x$，得 $f(x)f(-x)=f(0)=1$，所以 $f(-x)=[f(x)]^{-1}$，

$f(-rx)=[f(rx)]^{-1}=[f(x)]^{-r}$ ④

这说明③式对负的有理数也成立，连同④式，知③式对任何有理数 r 均成立.

对于无理数 s，可以取收敛于 s 的有理数数列 r_n，代入③式后取极限 $r_n\to s$，由 $f(x)$ 的连续性得 $f(sx)=[f(x)]^s$.

于是③式对无理数 r 都成立.

在③式中令 $x=1$，得 $f(r)=[f(1)]^r$，其中 r 为任意实数，记 $f(1)=a(a>0)$，把 r 换成 x，得 $f(x)=a^x$.

例17 设 f 是一个实值连续函数，$f(1)=1$，对任意的实数 a,b，有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，且对任意的实数 $x\neq 0$，有 $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$，证明：$f(x)=x$

证明 因为 $1=f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)=1+f(0)$，所以 $f(0)=0$，又因为 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，故只须证明：当 $x>0$ 时，$f(x)=x$.

由归纳法可知，对 $n\in\mathrm{N}$ 及 $x\in\mathrm{R}(x>0)$，有 $f(nx)=nf(x)$



特别地,取 $x=\frac{1}{n}$ 得 $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{n}$.

从而对任何有理数 $\frac{m}{n}$,有 $f\left(\frac{m}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}$.

又由于对 $y\geq 2$,必有 $x>0$ 使 $x+\frac{1}{x}=y$.从而

$$f(y)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 2\sqrt{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}=2.$$

于是当 $y\leq\frac{1}{2}$ 时,

$$|f(y)|=\left|\frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)}\right|\leq\frac{1}{2}.$$

其次注意到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,即对 $\forall\varepsilon>0$,

当 $x<\frac{1}{2n}<\varepsilon\quad(n\in\mathbf{N})$ 时,

$$|f(x)|=\frac{1}{n}|f(nx)|\leq\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

亦即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

对任一无理数 x,存在有理数序列 $\left\{\frac{m}{n}\right\}$,$\frac{m}{n}\to x$,于是

$$f(x)=f\left(\frac{m}{n}\right)+f\left(x-\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}+f\left(x-\frac{m}{n}\right)$$

取极限即得 $f(x)=\lim\frac{m}{n}=x$.

例18 求出所有连续有界函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对一切 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y) \qquad ①$$

解 设 $S=\{x|f(x)=0\}$,我们有

(1) $0\in S$, $f^2(0)-f^2(0)=f^2(0)$;

(2) $f(x)=0\Rightarrow f^2(2x)-f^2(x)=f(3x)f(x)=0$.

所以 $f(2x)=0$.

因为 $f^2(nx)-f^2(x)=f((n-1)x)\cdot f((n+1)x)$,由数学归纳法可得

$f(nx)=0$

所以 $n\in S\quad(n\in\mathbf{N})$.

(3) 若 $x,y\in S$,则

$f^2(x+y)-f^2(x-y)=f(2x)\cdot f(2y)=0$.



$f(x+y)\cdot f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)=0$

所以 $x+y\in S$.

可得 $f(-y)f(y)=f^2(0)-f^2(y)=-f^2(y)$.

$f^2(-y)-f^2(y)=f(0)f(-2y)=0$.

所以 $f(-y)=-f(y)$，即 f 为奇函数，只需讨论 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)$ 的值.

S 有 3 种情形

①$S=\{0\}$，此时由于连续性可设 $f(x)>0(x>0)$，于是，在 $x>y>0$ 时，有

$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)>0$

f 在 $(0,+\infty)$ 上递增，又 $f(x)$ 有界，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=g$ 存在.

$$g^2=\lim_{n\to+\infty}f(n+1)\cdot f(n-1)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(f^2(n)-f^2(1))=g^2-f^2(1)$$

从而 $f(1)=0$ 矛盾，所以 $S\neq\{0\}$.

②S 中没有最小正数，这时 S 是稠密的，即若 $\varepsilon\in S$，则 $\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon,\cdots\in S$，而且 ε 可以任意小，由连续性知 $f\equiv 0$.

③$0\neq a=\min(S\cap(0,+\infty))$，则 $S=\{na,n\in\mathbf{Z}\}$. 假设 $f(x)>0(x\in(0,a))$，并且 $a=\pi$.（否则可考虑函数 $g(x)=(\operatorname{sgn}f(\frac{a}{2}))f(\frac{ax}{\pi})$）

对于 $0<\varepsilon<\pi$，我们有

$f(\pi-\varepsilon)\cdot f(\pi+\varepsilon)=f^2(\pi)-f^2(\varepsilon)=-f^2(\varepsilon)<0$.

从而 $f(\pi+\varepsilon)<0$

同理有 $f(x)>0$，$x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 及 $f(x)<0$，

$x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$，从而

$f^2(x+\pi)-f^2(x)=f(\pi)f(2x+\pi)=0$

由此得 $f(x+\pi)=-f(x)$ 及 $f(x+2\pi)=f(x)$.

由 $f^2(x)-f^2(\pi-x)=f(\pi)\cdot f(\pi-2x)=0$，得

$f(x)=f(\pi-x)$.

于是只需讨论 f 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值. 由于 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$，我们可假定 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$.

因为 $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-f^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

定义 $g(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，则



$1-g^2(x)=f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-f^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(\pi-x)\cdot f(x)=f^2(x)$，

即 $f^2(x)+g^2(x)=1$.

$f(2x)=f(2x)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-f^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$=g^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-f^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-2f^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

由数学归纳法可证 $f\left(\frac{k}{2^n}\pi\right)=\sin\frac{k}{2^n}\pi\quad(k,n\in\mathbf{N},k\leqslant 2^{n-1})$.

由 f 的连续性，我们有 $f=\sin x$，所以全部符合要求的函数均为 $A\sin Bx$ 的形式.



思考题1 设 $\mathbf{N}^*$ 为正整数集，$f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 是 $\mathbf{N}^*$ 的一个排列.

(1)证明：存在一个由正整数构成的等差数列 $a,a+d,a+2d$，其中 $d>0$，使得 $f(a)<f(a+d)<f(a+2d)$.

(2)是否一定存在正整数 $a,a+d,\cdots,a+2003d$，其中 $d>0$，使得 $f(a)<f(a+d)<\cdots<f(a+2003d)$?

解 (1)任取正整数 a，只有有限个 d，使得 $f(a+d)<f(a)$，这是因为 $f(a+d)$ 是不同的正整数，于是存在 n，使得对于所有的 $d(d\geqslant n)$，均有 $f(a+d)>f(a)$.

下面考虑无穷序列

$f(a+n),f(a+2n),f(a+4n),\cdots,f(a+2^kn),\cdots$

假设不存在一个构成等差数列的正整数满足结论，则如上的数列一定是严格递减序列，因为如果 $f(a+2^{k+1}n)>f(a+2^kn)$，则构成等差数列的三个整数 $a,a+2^kn,a+2^{k+1}n$ 满足 $f(a)<f(a+2^kn)<f(a+2^{k+1}n)$.

所以存在均大于 $f(a)$ 且满足严格递减的无穷序列，但是在 $f(a)$ 和 $f(a+n)$ 之间只能有有限个正整数，矛盾.

因此，存在正整数 $a,a+d,a+2d(d>0)$ 使得 $f(a)<f(a+d)<f(a+2d)$.

(2)考虑排列 f

$1,2,4,3,8,7,6,5,16,15,14,13,12,11,10,9,32,\cdots$，其中对于 $n\geqslant 3$，第 2^n+1 项是 2^{n+1}，第 $2^n+2,\cdots,2^{n+1}$ 项分别是 $2^{n+1}-1,\cdots,2^n+1$.

下面证明，对排列 f，有

$f(a+2001d)>f(a+2002d)$ 或 $f(a+2002d)>f(a+2003d)$



假设上面的结论不成立，则 $f(a+2001d)$，$f(a+2002d)$，$f(a+2003d)$严格递增，于是，这三个数应在 f 的排列中的三个不同的递减子列中，其中递减子列是以形如 2^n 到 2^{n+1} 的 2^n 项组成的. 因此，$a+2002d$ 所在的单调递减的子列的长度至少为$\frac{a+2002d}{2}\geqslant 1001d$.

于是，$a+2003d-(a+2001d)\geqslant 1001d$(这是因为 $a+2001d$ 和 $a+2003d$ 均不在包含 $a+2002d$ 的递减的子列中)，即 $2d\geqslant 1001d$ 与 $d>0$ 矛盾.

所以，不一定存在满足条件的正整数.

思考题 2 设 f 是从非负整数集到自身的函数，对所有 $n\geqslant 0$，满足

(1) $(f(2n+1))^2-(f(2n))^2=6f(n)+1$，

(2) $f(2n)\geqslant f(n)$

问在 f 的值域中，满足小于 2003 的数有多少个?

解 在条件(1)中令 $n=0$，得

$f^2(1)-f^2(0)=6f(0)+1$，

即 $f^2(1)=(f(0)+3)^2-8$.

于是有

$(f(0)+3+f(1))(f(0)+3-f(1))=8=4\times 2$.

由于 $f(0)+3+f(1)$ 与 $f(0)+3-f(1)$ 的差为 $2f(1)$，所以

$$\begin{cases} f(0)+3+f(1)=4, \\ f(0)+3-f(1)=2 \end{cases}$$

故 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

由条件(1)得

$(f(2n+1)+f(2n))(f(2n+1)-f(2n))=6f(n)+1$.

假设 $f(2n+1)-f(2n)=d$，则

$$f(2n+1)+f(2n)=\frac{6f(n)+1}{d}$$

消去 $f(2n+1)$，得 $2f(2n)+d=\frac{6f(n)+1}{d}$

故 $2df(2n)+d^2-1=6f(n)$.

如果 $d>3$，则 $2df(2n)+d^2-1>6f(2n)\geqslant 6f(n)$，矛盾.

若 $d=2$ 或 3，则 $6f(n)+1$ 也可以被 2 或 3 整除，矛盾.

所以，$d=1$.

于是对所有的非负整数 n，有

$f(2n)=3f(n)$，$f(2n+1)=f(2n)+1=3f(n)+1$



若 k 为偶数，有 $f(k+1)=f(k)+1>f(k)$；

若 k 为奇数，因为 $f(1)>f(0)$，假设 $n\leqslant k$ 时均有 $f(n)>f(n-1)$，则

$$f(k+1)=3f\left(\frac{k+1}{2}\right)>3f\left(f\left(\frac{k-1}{2}\right)+1\right)\geqslant 3f\left(\frac{k-1}{2}\right)+1=f(k)$$

故 f 是严格递增的函数.

$$\begin{aligned}f(127)&=3f(63)+1=3(3f(31)+1)+1\\&=3(3(3f(15)+1)+1)+1=27f(15)+13\\&=27(3f(7)+1)+13=81(3f(3)+1)+40\\&=243(3f(1)+1)+121=1093<2003.\end{aligned}$$

$f(128)=3f(64)=3^2f(32)=\cdots=3^7f(1)=2187>2003$.

综上所述，在 f 的值域中共有 128 个值小于 2003.

同步检测 7

1. 填空题

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为非零实数，且满足 $3f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=4x$，则 $f(x)=$____.

(2) 若 $f(\sin x-1)=\cos^2 x+2$，则 $f(x)=$________.

(3) 设 $f(x)$、$g(x)$ 满足条件：对一切实数 x、y 有 $g(x-y)=g(x)g(y)+f(x)f(y)$，且 $f(-1)=-1$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，则 $g(0)-g(1)+g(2)=$________.

$[f(x)]^n+[g(x)]^n$（n 是不小于 2 的自然数）的最大值是____.

2. 解函数方程：$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，$x\neq 0$，$x\neq 1$.

3. 已知 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，并且 $f(x)+g(x)=1993x\sqrt{9-x^2}+x^{1994}$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$.

4. 求所有满足方程 $f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=\sin x+\cos y$，$x$、$y\in\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，求证：$f(x^n)=nf(x)$，$n\in\mathbf{N}$.

6. 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上且取正整数值的函数，对所有的正整数 m、n，有 $f(f(m)+f(n))=m+n$，求 $f(2007)$.

7. 设 $\mathbf{Q}$ 是全体有理数的集合，求适合下列两个条件的从 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的所有函数



(1) $f(1)=2$;

(2) 对 $\mathbf{Q}$ 中的所有 x 和 y，$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$.

8. 确定所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其中 $\mathbf{R}$ 为实数集，使得对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$.

9. 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意实数 x,y,z，有 $\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x)f(yz)\geqslant\frac{1}{4}$.

10. 如果非零连续函数 $f(x)$ 满足函数方程 $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$，$x,y\in\mathbf{R}$. 证明：$f(x)=(f(1))^{x^2}$.

11. 求二元一次函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切单调函数的解.

12. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x^2)-f(x)=1$，求 $f(x)$.

13. 求满足函数方程 $\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}=f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)(x\neq y)$ 的连续函数解.

14. 求函数方程 $f(4x)=f(2x)+f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的所有解.

15. 求所有函数 $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得 $f(x+yg(x))=g(x)+xf(y)$，$\forall x,y\in\mathbf{R}$.

16. 设函数 $f(x)$ 对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 都满足 $f(xf(y))=f(xy^2)-2x^2f(y)-f(x)-1$，试求出 $f(x)$.

17. 试求出所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对于任何的 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x^2+y^2)=xf(x)+yf(y)$.

18. 求 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x^2+y+f(y))=2y+f^2(x)$. (*)

19. 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，在零点连续，且 $f(x+2f(y))=f(x)+y+f(y)$. (*)



参考解答

第一讲　函数的基本概念

1. $[2,3]$（只要是$[2,3]$的任意子区间均可）

2. D　3. C　4. C

5. D　提示：消去 y 之后可得 $u=1+\dfrac{35}{37-\left(9x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)}$，用基本不等式可求得函数 u 的最小值为$\dfrac{12}{5}$.

6. $a\in(4,+\infty)$

提示：原问题等价于$\left(x+\dfrac{a}{x}-4\right)_{\min}>0$，注意到 $x>0$，所以由基本不等式得 $x+\dfrac{a}{x}-4\geqslant2\sqrt{x\cdot\dfrac{a}{x}}-4=2\sqrt{a}-4$.

所以$\left(x+\dfrac{a}{x}-4\right)_{\min}=2\sqrt{a}-4>0$. 又因为 $a>0$ 且 $a\neq1$，故 $a\in(4,+\infty)$.

7. $-4\leqslant a\leqslant-1$

提示　$A=(1,3)$，令 $f(x)=2^{1-x}+a$，$g(x)=x^2-2(a+7)x+5$，则只需 $f(x)$，$g(x)$在$(1,3)$上的图象均在 x 轴的下方，其充要条件是$\begin{cases}f(1)\leqslant0,\\f(3)\leqslant0,\\g(1)\leqslant0,\\g(3)\leqslant0,\end{cases}$由此推出 $-4\leqslant a\leqslant-1$.

8. $f(x)=x+1$

提示　因为对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，所以有 $f(xy+1)=f(y)f(x)-f(x)-y+2$，所以 $f(x)f(y)-f(y)-x+2=f(y)f(x)-f(x)-y+2$，即 $f(x)+y=f(y)+x$. 令 $y=0$，得 $f(x)=x+1$.

9. $\dfrac{5^n+1}{6}$



提示 由题设知，$f(x)$和式中的各项构成首项为1，公比为 $-x$ 的等比数列，由等比数列的求和公式，得 $f(x)=\frac{(-x)^{21}-1}{-x-1}=\frac{x^{21}+1}{x+1}$．令 $x=y+4$，得 $g(y)=\frac{(y+4)^{21}+1}{y+5}$，取 $y=1$，有 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=g(1)=\frac{5^{21}+1}{6}$．

10. $0<a<\frac{1}{3}$ 或 $1<a<5$

提示 因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，又 $2a^2+a+1=2\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$，

$3a^2-4a+1=(3a-1)(a-1)$，仅当 $a>1$ 或 $a<\frac{1}{3}$ 时，$3a^2-4a+1>0$ (*)

因为 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，

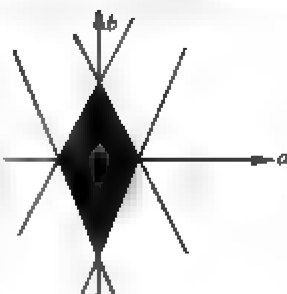
所以 $2a^2+a+1>3a^2-4a+1\Rightarrow a^2-5a<0$，所以 $0<a<5$，结合(*)知 $0<a<\frac{1}{3}$ 或 $1<a<5$．

11. 由(1)，存在 $a>1$，使 $f(a)\neq0$．根据(2)，有 $f(x)=f(a^{\log_a x})=f(a)\cdot\log_a x$，
于是所给方程为 $f(a)\log_a(mx)\cdot f(a)\log_a(mx^2)=4f^2(a)$．
因为 $f(a)\neq0$，故$(\log_a m+\log_a x)(\log_a m+2\log_a x)=4$，
即 $2\log_a^2 x+3\log_a m\cdot\log_a x+\log_a^2 m-4=0$．
要使题设方程所有根大于1，即需上述方程的两根 $\log_a x_1$，$\log_a x_2$ 都大于0，由此有
$(3\log_a m)^2-4\cdot2(\log_a^2 m-4)\geqslant0$，
$-\frac{3}{2}\log_a m>0$，
$\frac{1}{2}(\log_a^2 m-4)>0$．
$\log_a^2 m+32\geqslant0$，
即 $\log_a m<0$，
$\log_a m>2$ 或 $\log_a m<-2$．
注意到 $a>1$，所以 m 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{a^2}\right)$

12. 解：(1)$f_1(x)\in A$，$f_2(x)\notin A$
(2)因为 $f(x)\in A$，所以 $|f(u)-f(v)|=|a(u+v)+b|\cdot|u-v|\leqslant3|u-v|$，从而有 $|a(u+v)+b|\leqslant3$，由此得$\begin{cases}|2a+b|\leqslant3,\\|2a-b|\leqslant3,\\|b|\leqslant3\end{cases}$

所以，a，b 满足如右图所示区域





所以 a^2+b^2 的最大值与最小值分别为9,0。

(3) $f(2)=4a+2b=6\Rightarrow b=3-2a$，由此及 $|a(a+b)+b|\leqslant 3$ 得 $-3\leqslant a(a+b)+3-2a\leqslant 3\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant \frac{6}{a-2}\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant \frac{3}{2}$。

①若 $a=0$，则 $b=3\Rightarrow f(x)=3x\Rightarrow m=-2$；

②若 $0<a\leqslant\frac{3}{2}$，则二次函数 $f(x)$ 的开口向上，且对称轴方程 $x=1-\frac{3}{2a}<0$，易知 $f(2)=6$，从而分以下两种情形讨论。

若 $f\left(1-\frac{3}{2a}\right)=-\frac{(2a-3)^2}{4a}\geqslant -6$，即 $\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，则由 $m+2=2\left(1-\frac{3}{2a}\right)$ 及 $m<2$ 得 $m=-\frac{3}{a}$。

若 $f\left(1-\frac{3}{2a}\right)=-\frac{(2a-3)^2}{4a}<-6$，即 $0<a<\frac{9-6\sqrt{2}}{2}$，则由 $f(m)=-6$ 及 $m>1-\frac{3}{2a}$ 得 $m=\frac{2a-3+\sqrt{4a^2-36a+9}}{2a}$。

综上所述，有 $m=\begin{cases}-2, & (a=0)\\ \frac{2a-3+\sqrt{4a^2-36a+9}}{2a}, & \left(0<a<\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\right)\\ -\frac{3}{a}. & \left(\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}\right)\end{cases}$

13. (1) 证明：当 $x\in[-1,1]$ 时，

$4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2\leqslant 0$。

$-1-(4x^3-3x)=-(x+1)(2x-1)^2\leqslant 0$。

于是 $-1\leqslant 4x^3-3x\leqslant 1$，即 $|4x^3-3x|\leqslant 1$。

等号成立当且仅当 $x=-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$ 时取到。

评注：令 $x=\sin\alpha$，则 $4\sin^3\alpha-3\sin\alpha=-\sin 3\alpha$，故原不等式得证。

(2) 记 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$，若存在 $a,b,c\in\mathbf{R}$，使对 $x\in[-1,1]$ 均有 $|f(x)|\leqslant 1$，则 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$。

令 $g(x)=f(x)-(4x^3-3x)=ax^2+(b+3)x+c$，则由(1)可知

$g(-1)\geqslant 0, g\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0, g\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0, g(1)\leqslant 0$

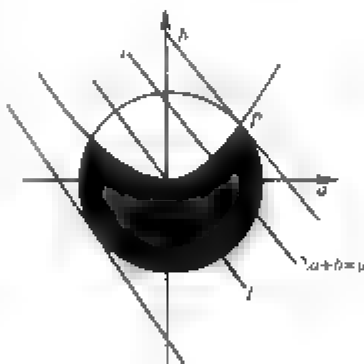
这表明方程 $ax^2+(b+3)x+c=0$ 至少有三个不同的实数根，从而只能是 $a=b+3=$



$c=0$ 即 $f(x)=4x^3-3x$，但这时 $f(1)=1$，矛盾.

所以，存在 $x\in[-1,1]$，使 $|4x^3+ax^2+bx+c|\geq 1$，故 $M\geq 1$，进而由前面的讨论知 $M=1$ 时 $a=0,b=-3,c=0$.

14. 令 $a=\sqrt{2}(x+y)$，$b=xy$，则 $a^2=2(x+y)^2\geq 8xy=8b$，这样，原题等价于 $\begin{cases}a^2+b^2\leq 9\\ a^2\geq 8b\end{cases}$ 的条件下，求 $u=2a+b$ 的最大值与最小值，这相当于一个线性规划问题，我们作出其可行域如右图的阴影部分，作直线 $l':2a+b=0$，对于任意平行于 l' 的直线 $l:2a+b=u$，显然 l 上任一点的坐标 (a_0,b_0) 都有 $2a_0+b_0=u$，当然我们取 l 与 b 轴的交点的坐标 $(0,b)$，此时 $u=b$，这样，u 的最大值与最小值正好是平行于 l' 的直线中，其纵截距的最大值与最小值.



由 $\begin{cases}a^2+b^2=9\\ a^2=8b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$，故圆与抛物线在第一象限的交点坐标为 $(2\sqrt{2},1)$，此时 l 在过 P 点时，其纵截距最大，即为

$u_{\max}=1+4\sqrt{2}$.

又 l 与圆相切时，其纵截距最小，此时 $\frac{|u|}{\sqrt{5}}=3$，所以 $u_{\min}=-3\sqrt{5}$.

15. 由已知条件可得

$$y=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

设 $A(0,1)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，则 y 的几何意义是，点 $M(x,x)$ 到 A、B、C 三点的距离之和最小.

易知△ABC 是以点 $(0,0)$ 为中心，边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，根据费尔马点的性质可得，当 $x=0$，即 $M(x,x)$ 与点 O 重合时，$MA+MB+MC$ 取最小值，故 y 的最小值为

$$y=\sqrt{0+1}+\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=3.$$

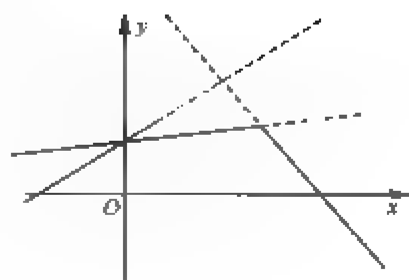
第二讲 函数的图象与性质

1. A 提示：易知其根关于 $x=3$ 对称，故有根 $3-x$ 时，必有根 $3+x$，故有 3 对这样的根其和为 18.

2. B



3. B



4. A 提示：作出三条直线 $y=4x+1$，$y=x+2$，$y=-2x+4$ 的图象，则右图中实线部分为 $y=f(x)$ 的图象，因此，$f(x)$ 的最大值为 $y=x+2$ 与 $y=-2x+4$ 的交点的纵坐标，即 $\frac{8}{3}$。

5. A 提示：根据函数周期为 2 且是偶函数可得

$$f\left(\frac{98}{19}\right)=f\left(-\frac{98}{19}\right)=f\left(-\frac{98}{19}+6\right)=f\left(\frac{16}{19}\right),$$

$$f\left(\frac{101}{17}\right)=f\left(-\frac{101}{17}\right)=f\left(-\frac{101}{17}+6\right)=f\left(\frac{1}{17}\right),$$

$$f\left(\frac{104}{15}\right)=f\left(\frac{104}{15}-6\right)=f\left(\frac{14}{15}\right).$$

又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数，且 $\frac{1}{17}<\frac{16}{19}<\frac{14}{15}$，故 $f\left(\frac{101}{17}\right)<f\left(\frac{98}{19}\right)<f\left(\frac{104}{15}\right)$。

6. $a=0$ 或 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a<-1$. 提示：当 $a\geqslant-1$ 时，$x\in[-1,a]$，$y=x+1\Leftrightarrow y\in[0,a+1]$；当 $a<0$ 时，$y=x^2\in[a^2,1]$，此时若 $[a^2,1]=[0,a+1]$ 可知 $a=0$ 与 $a<0$ 矛盾，故 $-1\leqslant a<0$ 时，无解；当 $0\leqslant a\leqslant1$ 时，$y=x^2\in[0,1]$，此时若 $[0,1]=[0,a+1]$ 可知 $a=0$；当 $a>1$ 时，$y=x^2\in[0,a^2]$，此时若 $[0,a^2]=[0,a+1]$ 可知 $a^2-a-1=0$，即 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；当 $a<-1$ 时，$A=\varnothing$，$\{y\mid y=f(x),x\in A\}=\{y\mid y=g(x),x\in A\}=\varnothing$。

7. 1997 提示：$f(1993)=f[f(1993+8)]=f[f(2001)]=f(1996)=f[f(2004)]=f(1999)=f[f(2007)]=f(2002)=1997$.

8. $2^{90}-1$. 提示：集合 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}^*\right\}=\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\frac{1}{\lg\frac{1}{x}}<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}^*\right\}$

$=\{x\mid 1\leqslant\lg x<2,x\in\mathbf{N}^*\}=\{x\mid 10\leqslant x<100,x\in\mathbf{N}^*\}$.

所以其真子集的个数为 $C_{90}^{1}+C_{90}^{2}+\cdots+C_{90}^{90}=2^{90}-1$.

9. 解：因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

即 $\log_2\frac{2-a-x}{a+x}=-\log_2\frac{2-a+x}{a-x}$，

所以 $\frac{2-a-x}{a+x}=\frac{a-x}{2-a+x}$。



解得 $a=1$，于是 $f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$.

$f^{-1}(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$. 下面比较 $f^{-1}(n)=\frac{2^n-1}{2^n+1}$ 与 $g(n)=\frac{n}{n+1}$ 的大小

$f^{-1}(n)-g(n)=\frac{2^n-1}{2^n+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{2^n-(2n+1)}{(2^n+1)(n+1)}$，作出 $y=2^x$ 与 $y=2x+1$ 在第一象限内的图象，它们的交点为 $A(x_0,y_0)$，易知 $2<x_0<3$，由图象知：当 $0<x<x_0$ 时，$2^x<2x+1$，当 $x>x_0$ 时，$2^x>2x+1$，故当 $n=1,2$ 时，$f^{-1}(n)-g(n)<0$，即 $f^{-1}(n)<g(n)$；当 $n\geqslant3$ 时，$f^{-1}(n)-g(n)>0$ 即 $f^{-1}(n)>g(n)$（也可用数学归纳法证明：当 $n\geqslant3$ 时，$2^n>2n+1$）.

10. 解：(1) 令 $x_1=x_2=0$，则 $f(0)=0$.

① 令 $x_1=x$，$x_2=-x$，则 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$.

所以 $f(-x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数

② 设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)>0$.

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，函数 $f(x)$ 在 R 上为增函数.

(2) 由 $f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立.

则 $f(\cos2\theta-3)>f(2m\cos\theta-4m)$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立

所以 $\cos2\theta-3>2m\cos\theta-4m$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立.

所以 $m>\frac{\cos2\theta-3}{2\cos\theta-4}$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 均成立

而 $\frac{\cos2\theta-3}{2\cos\theta-4}=\frac{2\cos^2\theta-4}{2\cos\theta-4}=\frac{\cos^2\theta-2}{\cos\theta-2}=(\cos\theta-2)+\frac{2}{\cos\theta-2}+4\leqslant-2\sqrt{2}+4$. 所以 $m>4-2\sqrt{2}$

11. 解 当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减.

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不是单调递减

曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于不同的两点等价于 $(2a-3)^2-4>0$，即 $a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{5}{2}$.

情形① P 正确，Q 不正确，即函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴不交于不同的两点 因此 $a\in(0,1)\cap\left[\left[\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{5}{2}\right]\right]$，即 $a\in\left[\frac{1}{2},1\right)$



情形② P不正确，Q正确，即函数 $y=\log_a(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不是单调递减，曲线 $y=x^2+(2a-3)x+1$ 与 x 轴交于不同的两点，因此 $a\in(1,+\infty)\cap\left[\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)\right]$，即 $a\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

综上所述，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

12. 解：(1) $\frac{x-3}{x+3}>0\Leftrightarrow x<-3$ 或 $x>3$.

因为 $f(x)$ 定义域为 $[\alpha,\beta]$，所以 $\alpha>3$.

设 $\beta\geqslant x_1>x_2\geqslant\alpha$，有 $\frac{x_1-3}{x_1+3}-\frac{x_2-3}{x_2+3}=\frac{6(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}>0$

当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 为减函数，当 $m>1$ 时，$f(x)$ 为增函数。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的值域为 $[\log_m m(\beta-1),\log_m m(\alpha-1)]$.

因为 $0<m<1$，$f(x)$ 为减函数.

所以 $\begin{cases}f(\beta)=\log_m\frac{\beta-3}{\beta+3}=\log_m m(\beta-1),\\ f(\alpha)=\log_m\frac{\alpha-3}{\alpha+3}=\log_m m(\alpha-1).\end{cases}$

即 $\begin{cases}m\beta^2+(2m-1)\beta-3(m-1)=0,\\ m\alpha^2+(2m-1)\alpha-3(m-1)=0.\end{cases}$

又 $\beta>\alpha>3$，即 α,β 为方程 $mx^2+(2m-1)x-3(m-1)=0$ 的大于3的两个根

所以 $\begin{cases}0<m<1,\\ \Delta=16m^2-16m+1>0,\\ -\frac{2m-1}{2m}>3,\\ mf(3)>0.\end{cases}$ 所以 $0<m<\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

故当 $0<m<\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ 时，满足题意条件的 m 存在.

13. 解：(1) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f(-1)=f(1)\Rightarrow k=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x$

(2) 证法一：$f(x)=\frac{1}{2}x+b\Leftrightarrow 4^x+1=4^{x+b}$，假定存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $4^{x_1}+1=4^{x_1+b}$，$4^{x_2}+1=4^{x_2+b}$，则两式相减得 $4^{x_1}-4^{x_2}=4^b(4^{x_1}-4^{x_2})\Rightarrow b=0$，但当 $b=0$ 时，$4^x+1=4^x$ 是不可能成立的，故假定为假，命题为真.

证法二：$f(x)=\frac{1}{2}x+b\Leftrightarrow b=\log_4(4^x+1)-x$. ①



令 $g(x)=\log_4(4^x+1)-x$，则 $g'(x)=-\frac{1}{4^x+1}<0$，所以函数 $g(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数，因此，对任意实数 b，方程①最多只有一个实数解，亦即函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 最多只有一个交点.

(3) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 4^x+1=a\left(4^x-\frac{4}{3}\cdot 2^x\right)$，令 $2^x=t>0$，则原问题等价于关于 t 的方程 $(a-1)t^2-\frac{4}{3}at-1=0$ 只有一个正实根，从而有：

①若 $a-1=0$，即 $a=1$，则 $t=-\frac{3}{4}$，不合题意，舍去；

②若 $\Delta=\frac{16}{9}a^2+4(a-1)=0$，得 $a=\frac{3}{4}$ 或 $a=-3$，经检验，$a=-3$ 符合题意；

③方程有一个正根和一个负根，即 $\frac{-1}{a-1}<0$，即 $a>1$ 符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{-3\}\cup(1,+\infty)$.

14. 解：(1) $f(x+1)=-\frac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，故

$f\left(\frac{2001}{4}\right)=f\left(250\times 2+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{3}$；

(2) $2k+\frac{1}{2}<x<2k+1\Rightarrow 0<2k+1-x<\frac{1}{2}$，所以

$$f(x)=f(x-2k)=-\frac{1}{f(x-2k-1)}=\frac{1}{f(2k+1-x)}=3^{x-2k-1}；$$

(3) $\log_3 f(x)>x^2-kx-2k\Leftrightarrow x^2-(k+1)x+1<0$. 令 $g(x)=x^2-(k+1)x+1$，则 $g(x)$ 是开口向上、对称轴方程为 $x=\frac{k+1}{2}$ 的抛物线. 因为 $\frac{k+1}{2}<2k+\frac{1}{2}(k\in\mathbf{N}^*)$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left(2k+\frac{1}{2},2k+1\right)$ 内是增函数，故 $g(x)>g\left(2k+\frac{1}{2}\right)=\frac{8k^2-2k+3}{4}>0$，因此，不存在正整数 k，使得当 $2k+\frac{1}{2}<x<2k+1$ 时，$\log_3 f(x)>x^2-kx-2k$ 有解.

15. 解：$f(x)$ 是周期函数，且 $T=1$ 为它的周期. 事实上，任取 $x\in\left[-n,-n+\frac{1}{n+1}\right](n\in\mathbf{N})$，则

$$-(n-1)\leqslant x+1\leqslant-(n-1)+\frac{1}{n+1}<-(n-1)+\frac{1}{(n-1)+1},$$

所以 $x+1\in\left[-(n-1),-(n-1)+\frac{1}{(n-1)+1}\right]\subseteq A$，则



$f(x+1)=\frac{1}{2}=f(x)$

又任取 $x\in\left[(n-1),(n-1)+\frac{n}{n+1}\right)(n\in\mathbf{N})$，则

$n\leqslant x+1<n+\frac{n}{n+1}=n+\frac{n+1}{(n+1)+1}$，

所以 $x+1\in\left[n,n+\frac{n+1}{(n+1)+1}\right)\subseteq A$，且

$f(x+1)=\frac{1}{2}=f(x)$

由此可见，对 $\forall x\in A$，有 $f(x+1)=f(x)$，得证

16. 证：依条件有 $f(x+2\lambda)=F[f(x+\lambda)]=F[F(f(x))]=F[F^{-1}(f(x))]=f(x)$，$\lambda$ [illegible]，$x\in\mathbf{R}$

17. 由对称性，只考虑第一象限，设质点先沿 x 轴正向运动到点 $(t,0)$，再离开 x 轴在平面上运动到点 (x,y)，则

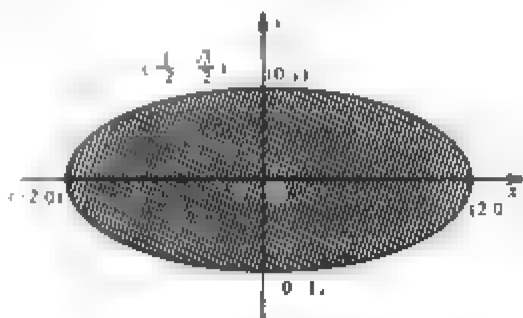
$(x-t)^2+y^2\leqslant\left(\frac{2-t}{2}\right)^2$，

所以 $y^2\leqslant\frac{3}{4}\left[\frac{1}{9}(2-x)^2-\left(t-\frac{2(2x-1)}{3}\right)^2\right]$，

若 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$，则当 $t=\frac{2}{3}(2x-1)$ 时，y^2 达到最大值，此时 $y\leqslant\frac{2-x}{\sqrt{3}}$；

若 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$，则当 $t=0$ 时，y^2 达最大值，此时 $y^2\leqslant 1-x^2$。

于是，所求区域在第一象限的边界由线段 $y=\frac{2-x}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right)$ 与圆弧 $x^2+y^2=1\left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 组成，其图形见右图。



18. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,a+1]$，$a\in\mathbf{R}$，当 $n=1$ 时，$f=0$，显然 $f_{\max}=0$。

当 $n>1$ 时，若固定 $x_2,x_3,\cdots,x_n$，则有

$f=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$

$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)x_1^2-\frac{2x_1}{n^2}\sum_{i=2}^{n}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}x_i\right)^2$

$x_1\in[a,a+1]$，f 是 x_1 的二次函数，二次项系数 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}>0$，因此



$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\max\{f(a,x_2,\cdots,x_n),f(a+1,x_2,\cdots,x_n)\}$，

同理

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\max\limits_{x_i\in\{a,a+1\}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$i=1,2,\cdots,n$。

记 $b=a+1$，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 s 个 $x_i=a$，$n-s$ 个 $x_i=b$，此时 $\max\limits_{x_i\in\{a,a+1\}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$=\frac{1}{n}(sa^2+(n-s)b^2)-\left(\frac{1}{n}(sa+(n-s)b)\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^2}s(n-s)(b-a)^2=\frac{1}{n^2}s(n-s)$$

$$\leqslant\begin{cases}\frac{1}{4}\ (n\text{ 为偶数}),\\ \frac{n^2-1}{4n^2}\ (n\text{ 为奇数}),\end{cases}$$

当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个取 a（或 $a+1$）其余取 $a+1$（或 a）时，等号成立，所以

$$f_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{4} & (n\text{ 为偶数}),\\ \frac{n^2-1}{4n^2} & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

第三讲　函数的值域与最值

1. D　**2.** B　**3.** D　**4.** A　**5.** D　**6.** D　**7.** $\frac{5}{2}$　**8.** $\frac{1}{12}$　**9.** 6

10. (1) 当 $a\geqslant1$ 时，$x\in\left(\frac{a}{1+a},+\infty\right)$；当 $0<a<1$ 时，$x\in\left(\frac{a}{1+a},\frac{a}{1-a}\right)$；

(2) $F(x)=|x-a|-ax=\begin{cases}(1-a)x-a & (x>a),\\ -(a+1)x+a & (0<x\leqslant a),\end{cases}$

因为 $-(a+1)<0$，函数 $y_1=-(a+1)x+a(0<x\leqslant a)$ 是单调递减的，存在最小值

所以必须使 $y_2=(1-a)x-a$ 在 $x>a$ 上递增或为常数

所以 $1-a\geqslant0$，即 $a\leqslant1$，结合条件，当 $0<a\leqslant1$ 时，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，当 $x=a$ 时，$F_{\min}(x)=-a^2$。

11. 设 $y=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$，则由已知条件可知，上述函数的值域为 $[1,9]$。

因为 $y(x^2+1)=mx^2+8x+n$，$(y-m)x^2-8x+y-n=0$。



$\Delta=64-4(y-m)(y-n)\geq 0$，即$(y-m)(y-n)-16\leq 0$.

由题意知，$y^2-(m+n)y+mn-16=0$的两个实数根分别为1，9.

故 $\begin{cases}1-(m+n)+mn-16=0,\\81-9(m+n)+mn-16=0,\end{cases}$ 解之 $\begin{cases}m=5,\\n=5\end{cases}$

12. 设 $t=\frac{bx^2+ax+b}{x^2+x+1}$，$tx^2+tx+t=bx^2+ax+b$，

$(t-b)x^2+(t-a)x+(t-b)=0$.

$\Delta=(t-a)^2-4(t-b)^2\geq 0$

$\Rightarrow[t-a+2(t-b)][t-a-2(t-b)]\geq 0$，

$\left(t-\frac{a+2b}{3}\right)(t+a-2b)\leq 0$，

由于$b<a$，易知$\frac{a+2b}{3}>2b-a$，所以，$2b-a\leq t\leq\frac{a+2b}{3}$.

由题意知：$\begin{cases}\frac{a+2b}{3}=1\\2b-a\leq 0\end{cases}\Rightarrow a\geq\frac{3}{2}$.

13. 设 $x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$，其中 $1\leq r\leq 2$

所以 $u=x^2+xy+y^2=r^2+r^2\sin\alpha\cos\alpha=r^2\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$

所以 $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}r^2\leq u\leq\frac{3}{2}r^2\leq 6$

故u的最大值为6，最小值为$\frac{1}{2}$.

14. 由平均值不等式$(x+y)(y+z)=y(x+y+z)+xz\geq 2\sqrt{y(x+y+z)\cdot xz}=2$，当$x=z=1$，$y=\sqrt{2}-1$时，等号成立，故最小值为2.

15. 由$|x|\leq 1$且$x\neq 0$，令$x=\sin\theta$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

$$y=\frac{2(1+x)}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{2(1+\sin\theta)}{1+\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{2(1+\sin\theta)}{1+\cos\theta}=\frac{2\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2$$

当$\tan\frac{\theta}{2}=-1$时，$\theta=-\frac{\pi}{2}$，即$x=-1$时，$y_{\min}=0$；

当$\tan\frac{\theta}{2}=1$，$\theta=\frac{\pi}{2}$时，即$x=1$时，$y_{\max}=4$

16. 由已知条件得



$a=\lg(xy^{-1}+z), b=\lg(yz+x^{-1}), c=\lg[(xz)^{-1}+y]$

设 $\frac{x}{y}+z, yz+\frac{1}{x}, \frac{1}{xz}+y$ 中的最大数为 u，则 $M=\lg u$.

由已知条件知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，于是

$$u^2\geqslant\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{1}{xz}+y\right)$$

$$=\left(\frac{1}{yz}+yz\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant2+2=4.$$

所以 $u\geqslant2$，且当 $x=y=z$ 时，$u=2$，故 u 的最小值为 2，从而 M 的最小值为 $\lg2$

17. 由于 $M=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant1}|f(x)|$，所以 $M\geqslant|f(1)|, M\geqslant|f(0)|, M\geqslant|f(-1)|$，故

$$4M\geqslant|1+p+q|+2|-q|+|1-p+q|$$

$$\geqslant|1+p+q-2q+1-p+q|=2.$$

所以 $M\geqslant\frac{1}{2}$，而当 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}$ 时，$M=\frac{1}{2}$，所以 M 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

18. (1) 不妨设 $\alpha\leqslant x_1<x_2\leqslant\beta$，由题设知，$\alpha+\beta=\frac{t}{2}$，$\alpha\beta=-1$，于是由 $(x_1-\alpha)(x_2-\beta)\leqslant0$，得 $x_1x_2-(\alpha x_2+\beta x_1)+\alpha\beta\leqslant0$.

$4x_1x_2-4(\alpha x_2+\beta x_1)-4\leqslant0$，所以 $4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4\leqslant4(\alpha x_2+\beta x_1)-t(x_1+x_2)$
$=4(\alpha x_2+\beta x_1)-2(\alpha+\beta)(x_1+x_2)=2(\alpha x_2+\beta x_1)-2(\alpha x_1+\beta x_2)=2(x_2-x_1)(\alpha-\beta)<0$.

(2) $\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2+16}}{4}$，$\beta=\frac{t+\sqrt{t^2+16}}{4}$.

所以 $f(\alpha)=-\frac{8}{\sqrt{t^2+16}-t}$，$f(\beta)=\frac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}$.

设 $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$，$x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=-\frac{4x_1x_2-t(x_1+x_2)-4}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}(x_2-x_1)>0$

所以 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数，故

$g(t)=f(\beta)-f(\alpha)=\frac{8}{\sqrt{t^2+16}+t}+\frac{8}{\sqrt{t^2+16}-t}=\sqrt{t^2+16}\geqslant4$，当 $t=0$ 时等号成立

故 $g(t)$ 的最小值为 4.

19. 不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，令 $a=\min\{|a_i-a_j|\}$，则当 $i>j$ 时，有 $a_i-a_j\geqslant(i-j)a$，

所以 $\sum\limits_{i<j}(a_i-a_j)^2\geqslant a^2\sum\limits_{i<j}(i-j)^2$

$$=a^2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k^2=\frac{a^2\cdot n^2(n^2-1)}{12}.$$

另一方面有

$$\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant n.$$



故 $a^2\cdot\frac{n^2(n^2-1)}{12}\leqslant n$，即 $a\leqslant\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$

而当 $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，a_i 成等差数列时上述等号成立，故

$\max(\min_{i<j}\{|a_i-a_j|\})=\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$

第四讲　二次函数与三次函数

1. B

2. C　提示：因为 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $-\frac{b}{2a}=1$.

又因为 $a<0$，所以 $b>0$. 又因为 $f(0)>0$，即 $c>0$，所以 $abc<0$.

因为 $f(1)$ 是函数的最大值，所以 $f(1)=a+b+c>0$.

再由 $f(-1)<0$，得 $b>a+c$，$b=-2a$.

则 $2b=-4a>-3a=-2a-a=b-a>c$.

3. B　4. A　5. B

6. D　不妨设 $1-kx\geqslant0$，由 $(1-kx)\sqrt{1+x}\leqslant1$，得 $(1+x)(1-kx)^2\leqslant1$，于是 $k^2x^3-2kx+1+k^2x^2-2kx^2+x\leqslant1$.

又 $x\in[0,1]$，有 $k^2x^2+(k^2-2k)x+1-2k\leqslant0$，得 $k\geqslant\frac{1}{2}$.

由 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant1-lx$，得 $\frac{1}{1+x}\leqslant1-2lx+l^2x^2$，有 $l^2x^2+(l^2-2l)x+1-2l\geqslant0$，

$x\in[0,1]\Rightarrow l\leqslant\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

7. $\begin{cases}1-a, & 当\ a\leqslant\frac{1}{2},\\ a, & 当\ a>\frac{1}{2}.\end{cases}$　数形结合，分类讨论.

8. $-4\leqslant a\leqslant-1$. 易知 $A=\{x|1<x<3\}$，设 $f(x)=2^{1-x}+a$，$g(x)=x^2-2(a+7)x+5$.

要使 $A\subseteq B$，只需 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(1,3)$ 上的图象均在 x 轴的下方，则 $f(1)\leqslant0$，$f(3)\leqslant0$，$g(1)\leqslant0$，$g(3)\leqslant0$，由此可解得结果.

9. $a\leqslant-2$　原不等式可化为 $\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\frac{(a-1)^2}{4}$.

由 $-1\leqslant\cos x\leqslant1$，$a<0$，$\frac{a-1}{2}<0$ 知当 $\cos x=1$ 时，函数 $y=\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2$ 有最大值



$\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2$，于是$\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a+\frac{(a-1)^2}{4}$，解得$a\leqslant -2$或$a\geqslant 1$(舍去).

10. 解 (1) 设$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，则因为$\alpha,\beta$是方程$4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$的两个不相等实根，所以$4x^2-4tx-1\leqslant 0$，即$-2x^2+2tx\geqslant-\frac{1}{2}$，从而有

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x-t)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2tx+2}{(x^2+1)^2}\geqslant\frac{-\frac{1}{2}+2}{(x^2+1)^2}>0,$$

所以函数$f(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上是增函数，由韦达定理及$\alpha+\beta=t,\alpha\beta=-\frac{1}{4}$得

$$\begin{aligned}g(t)=f(\beta)-f(\alpha)&=\frac{2\beta-t}{\beta^2+1}-\frac{2\alpha-t}{\alpha^2+1}=\frac{\beta-\alpha}{\beta^2+1}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+1}\\&=(\beta-\alpha)\left[\frac{1}{\beta^2+1}+\frac{1}{\alpha^2+1}\right]=(\beta-\alpha)\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+2}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}\\&=(\beta-\alpha)\cdot\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2}{(\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}\\&=\frac{16t^2+40}{16t^2+25}\sqrt{t^2+1}.\end{aligned}$$

(2) 证明：$g(\tan u_i)=\frac{16\tan^2u_i+40}{16\tan^2u_i+25}\cdot\sqrt{\tan^2u_i+1}=\frac{16+24\cos^2u_i}{16+9\cos^2u_i}\cdot\frac{1}{\cos u_i}$

$=\frac{1}{16+9\cos^2u_i}\left(\frac{16}{\cos u_i}+24\cos u_i\right)\geqslant\frac{1}{16+9\cos^2u_i}\cdot2\sqrt{\frac{16}{\cos u_i}\cdot24\cos u_i}=\frac{16\sqrt{6}}{16+9\cos^2u_i}$，当且仅当$\frac{16}{\cos u_i}=24\cos u_i$，即$\cos u_i=\frac{\sqrt{6}}{3}(i=1,2,3)$时取得等号，从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}&\leqslant\frac{1}{16\sqrt{6}}[48+9(\cos^2u_1+\cos^2u_2+\cos^2u_3)]\\&=\frac{1}{16\sqrt{6}}[75-9(\sin^2u_1+\sin^2u_2+\sin^2u_3)].\end{aligned}$$

而$\sin^2u_1+\sin^2u_2+\sin^2u_3\geqslant\frac{1}{3}(\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3)^2=\frac{1}{3}$，当且仅当$\sin u_1=\sin u_2=\sin u_3=\frac{1}{3}$时取得等号，故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}&\leqslant\frac{1}{16\sqrt{6}}[75-9(\sin^2u_1+\sin^2u_2+\sin^2u_3)]\\&<\frac{1}{16\sqrt{6}}(75-3)=\frac{\sqrt{6}}{96}\times72=\frac{3\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

11. 解 (1) $f_1(x)\in A$，$f_2(x)\notin A$.



(2)因为 $f(x)\in A$，所以 $|f(u)-f(v)|=|a(u+v)+b|\cdot|u-v|\leqslant 3|u-v|$，从而有 $|a(u+v)+b|\leqslant 3$，由此及 $u,v\in(-1,1)$，$f(x)$是$\mathbf{R}$上的连续函数知 $|2a+b|\leqslant 3$；

(3) $f(2)=4a+2b=6\Rightarrow b=3-2a$，由此及 $|a(u+v)+b|\leqslant 3$，得

$$-3\leqslant a(u+v)+3-2a\leqslant 3\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant \frac{6}{2-u-v}\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant \frac{3}{2}$$

①若 $a=0$，则 $b=3\Rightarrow f(x)=3x\Rightarrow m=-2$；

②若 $0<a\leqslant\frac{3}{2}$，则二次函数 $f(x)$ 的开口向上，且对称轴方程 $x=1-\frac{3}{2a}<0$，从而分以下两种情形讨论.

若 $f\left(1-\frac{3}{2a}\right)=-\frac{(2a-3)^2}{4a}\leqslant -6$，即 $\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，则由 $f(m)=6$ 及 $m<2$ 得 $m=-\frac{3}{a}$；

若 $f\left(1-\frac{3}{2a}\right)=-\frac{(2a-3)^2}{4a}>-6$，即 $0<a<\frac{9-6\sqrt{2}}{2}$，则由 $f(m)=-6$ 及 $m>1-\frac{3}{2a}$ 得 $m=\frac{2a-3+\sqrt{4a^2-36a+9}}{2a}$.

综上所述，有 $m=\begin{cases}-2, & a=0\\ \frac{2a-3+\sqrt{4a^2-36a+9}}{2a}, & 0<a<\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{3}{a}, & \frac{9-6\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}.\end{cases}$

12. 解：设方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有两个相异的实数根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow b=a(x_1+x_2)$，$c=ax_1x_2$.

(1) $b-2c=a(x_1+x_2)-2ax_1x_2=a[x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)]$，

$a-c=a-ax_1x_2=a(1-x_1x_2)$.

因为 $0<x_1<x_2<1$，所以 $x_1(1-x_2)>0$，$x_2(1-x_1)>0$，$1-x_1x_2>0$，又 $a>0$

故 $b-2c>0$，$a-c>0$ 即 $b>2c$，$a>c$；

(2) $f(0)f(1)=c(a-b+c)=ax_1x_2[a-a(x_1+x_2)+ax_1x_2]$

$$=a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)<a^2\cdot\left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x_2+1-x_2}{2}\right)^2=\frac{a^2}{16}$$

13. 解：(1) $f'(x)=ax^2+bx-a^2$

因为 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，

所以 x_1,x_2 是方程 $f'(x)=0$ 的两个实数根.



因为 $a>0$，所以 $x_1x_2=-a<0$，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，

所以 $|x_1|+|x_2|=|x_1-x_2|=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+4a}$.

因为 $|x_1|+|x_2|=2$，所以 $\frac{b^2}{a^2}+4a=4$，即 $b^2=4a^2-4a^3$.

因为 $b^2\geqslant 0$，所以 $0<a\leqslant 1$.

(2) 设 $g(a)=4a^2-4a^3$，则 $g'(a)=8a-12a^2=4a(2-3a)$.

由 $g'(a)>0\Leftrightarrow 0<a<\frac{2}{3}$，$g'(a)<0\Leftrightarrow \frac{2}{3}<a\leqslant 1$.

得 $g(a)$ 在区间 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 上是增函数，在区间 $\left(\frac{2}{3},1\right]$ 上是减函数.

所以 $g(a)_{\max}=g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{27}$.

所以 $|b|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

(3) 因为 x_1，x_2 是方程 $f'(x)=0$ 的两个实数根，

所以 $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

所以 $h(x)=a(x-x_1)(x-x_2)-2a(x-x_1)=a(x-x_1)(x-x_2-2)$.

所以 $|h(x)|=a|x-x_1|\cdot|x-x_2-2|\leqslant a\left(\frac{|x-x_1|+|x-x_2-2|}{2}\right)^2$.

因为 $x>x_1$，所以 $|x-x_1|=x-x_1$.

又 $x_1<0$，$x_1x_2<0$，所以 $x_2>0$，所以 $x_2+2>2$.

因为 $x<2$，所以 $x-x_2-2<0$，所以 $|x-x_2-2|=x_2+2-x$.

所以 $|x-x_1|+|x-x_2-2|=x_2-x_1+2=4$.

所以 $|h(x)|\leqslant 4a$.

14. (1) 方法 1　由 $f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+(b-1)x+c-b=0$，

依题设可知，$\Delta=(b+1)^2-4c=0$.

因为 $b>-1$，$c>0$，

所以 $b+1=2\sqrt{c}$，即 $b=\varphi(c)=2\sqrt{c}-1$.

方法 2　依题设可知 $f'(x)=g'(x)$，即 $2x+b=1$，

所以 $x=\frac{1-b}{2}$ 为切点横坐标.

于是 $f\left(\frac{1-b}{2}\right)=g\left(\frac{1-b}{2}\right)$，化简得 $(b+1)^2=4c$



同方法1得 $b=\varphi(c)=2\sqrt{c}-1$.

(2)依题设 $D(x)=\dfrac{x^2+bx+c}{x+b}=x+\dfrac{c}{x+b}$.

所以 $D'(x)=1-\dfrac{c}{(x+b)^2}=\left(1-\dfrac{\sqrt{c}}{x+b}\right)\left(1+\dfrac{\sqrt{c}}{x+b}\right)$

因为 $D(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是增函数,

所以 $\left(1-\dfrac{\sqrt{c}}{x+b}\right)\left(1+\dfrac{\sqrt{c}}{x+b}\right)\geqslant 0$ 在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立,

又 $x>-b$, $c>0$, 所以上式等价于 $1-\dfrac{\sqrt{c}}{x+b}\geqslant 0$ 在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立,

即 $\sqrt{c}\leqslant x+b$, 而由(1)可知 $\sqrt{c}\leqslant x+2\sqrt{c}-1$,

所以 $\sqrt{c}\geqslant 1-x$.

又函数 $1-x$ 在 $[-1,+\infty)$ 上的最大值为2,

所以 $\sqrt{c}\geqslant 2$, 解得 $c\geqslant 4$, 即 c 的最小值为4.

(3)由 $H(x)=(x+b)(x^2+bx+c)=x^3+2bx^2+(b^2+c)x+bc$,

可得 $H'(x)=3x^2+4bx+(b^2+c)$

令 $3x^2+4bx+(b^2+c)=0$, 依题设欲使函数 $H(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有极值点,

则须满足 $\Delta=4(b^2-3c)=4(c-4\sqrt{c}+1)>0$,

亦即 $c-4\sqrt{c}+1>0$, 解得 $\sqrt{c}<2-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{c}>2+\sqrt{3}$,

又 $c>0$, 所以 $0<c<7-4\sqrt{3}$ 或 $c>7+4\sqrt{3}$.

故存在常数 $c\in(0,7-4\sqrt{3})\cup(7+4\sqrt{3},+\infty)$, 使得函数 $H(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有极值点.

15. (1) $b>2a\Rightarrow -\dfrac{b}{2a}<-1$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数, 所以

$[f(\sin x)]_{\max}=f(1)=a+b+c=2$, $[f(\sin x)]_{\min}=f(-1)=a-b+c=-4$,

解之得 $b=3$, $a+c=-1$, 注意到 $a<\dfrac{b}{2}=\dfrac{3}{2}$ 及 $a\in\mathbf{N}^*$, 所以 $a=1$, $b=3$, $c=-2$, 即

$f(x)=x^2+3x-2\Rightarrow [f(x)]_{\min}=-\dfrac{17}{4}$.

(2)注意到当 $x=1$ 时, $4\leqslant f(1)\leqslant 2(1^2+1)=4\Rightarrow f(1)=4$, 且 $f(x)$ 在点 $(1,4)$ 处的切线即为直线 $y=4x$, 故

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=4 \\ f'(1)=2a+b=4 \end{cases}\Rightarrow a=c, b=4-2c.$$



因为 $b\in\mathbf{N}$，所以 $\begin{cases}a=c=1,\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=c=2,\\b=0,\end{cases}$ 由此及存在 x_0，使得不等式 $f(x_0)<2(x_0^2+1)$ 成立，因此，有 $c=1$

16. 解 由 $f(x-4)=f(2-x)$，$x\in\mathbf{R}$，可知二次函数 $f(x)$ 的对称轴 $x=-1$，

又由(3)知，二次函数 $f(x)$ 的开口向上，即 $a>0$，

于是可设 $f(x)=a(x+1)^2(a>0)$。

由(1)知 $f(1)\geqslant1$，由(2)知 $f(1)\leqslant\left(\frac{1+1}{2}\right)^2=1$，所以 $f(1)=1$。

得 $1=a(1+1)^2$，有 $a=\frac{1}{4}$。

所以得 $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$。

因为 $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$ 的图象开口向上，而 $y=f(x+t)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 的图象平移 t 个单位得到，要在区间$[1,m]$上，使得 $y=f(x+t)$ 的图象在 $y=x$ 的图象的下方，且 m 最大，则 1 和 m 应当是关于 x 的方程

$$\frac{1}{4}(x+t+1)^2=x \qquad ①$$

的两个根

令 $x=1$ 代入方程①，得 $t=0$ 或 $t=-4$。

当 $t=0$ 时，方程①的解为 $x_1=x_2=1$，这与 $m>1$ 矛盾！

当 $t=-4$ 时，方程①的解为 $x_1=1$，$x_2=9$，所以 $m=9$。

又当 $t=-4$ 时，对任意 $x\in[1,9]$，恒有

$(x-1)(x-9)\leqslant0$，即 $\frac{1}{4}(x-4+1)^2\leqslant x$。

也就是 $f(x-4)\leqslant x$，所以，m 的最大值为 9。

17. 证明：由 $f(x)=ax^2+bx+c$，得

$$\begin{cases}a=\dfrac{f(1)+f(-1)-2f(0)}{2},\\b=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2},\\c=f(0).\end{cases}$$

所以 $f(x)=\frac{x^2+x}{2}f(1)+\frac{x^2-x}{2}f(-1)+(1-x^2)f(0)$。

因为 $|f(1)|\leqslant1$，$|f(-1)|\leqslant1$，$|f(0)|\leqslant1$，



所以 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}|x^2+x|+\frac{1}{2}|x^2-x|+|1-x^2|$.

令 $g(x)=\frac{1}{2}(|x^2+x|+|x^2-x|+2|1-x^2|)$.

显然,$g(x)$在$[-2,2]$上是偶函数.

为此,考虑 $g(x)$在$[0,2]$上的最大值.

易得 $g(x)=\begin{cases}-x^2+x+1 & (0\leqslant x\leqslant 1);\\ 2x^2-1 & (1<x\leqslant 2)\end{cases}$

求得 $g(x)$在$[0,2]$上的最大值为 7.从而 $g(x)$在$[-2,2]$上的最大值为 7.

故 $|f(x)|\leqslant 7$.

18. (1)$pf\left(\frac{m}{m+1}\right)=p\left[p\frac{m^2}{(m+1)^2}+q\frac{m}{m+1}+r\right]$

$$=pm\left[p\frac{m}{(m+1)^2}+\frac{q}{m+1}+\frac{r}{m}\right]$$

$$=pm\left[p\frac{m}{(m+1)^2}-\frac{p}{m+2}\right]$$

$$=p^2m\left[\frac{m(m+2)-(m+1)^2}{(m+1)^2(m+2)}\right]$$

$$=-p^2m\frac{1}{(m+2)(m+1)^2}<0.$$

得证.

(2)我们只证明 $p>0$ 的情况,$p<0$ 时可同样证明.

①当 $r>0$ 时,由于 $f(0)>0$,及 $f\left(\frac{m}{m+1}\right)<0$,

所以在$\left(0,\frac{m}{m+1}\right)$内 $f(x)=0$ 有一根.

②当 $r\leqslant 0$ 时,

因为 $\frac{1}{m}>\frac{1}{m+1}\Rightarrow\frac{r}{m}<\frac{r}{m+1}$,

又 $\frac{p}{m+2}<\frac{p}{m+1}$,

所以 $\frac{p}{m+2}+\frac{q}{m+1}+\frac{r}{m}<\frac{r}{m+1}+\frac{q}{m+1}+\frac{p}{m+1}=\frac{p+q+r}{m+1}$.

所以 $p+q+r>0$,

即 $f(1)>0$,又 $f\left(\frac{m}{m+1}\right)<0$,



所以 $f(x)=0$ 在 $\left(\frac{m}{m+1},1\right)$ 内有一解

综上所述，方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内恒有解.

第五讲 幂函数、指数函数与对数函数

1.C 2.C 3.B 4.B 5. $0\leqslant a\leqslant 2$ 6. 3;3

7. 解：因为函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的图象与函数 $y=x$ 的图象有公共点，

所以方程组 $\begin{cases}y=a^x,\\y=x\end{cases}$ 有解，消去 y 得 $a^x=x$.

显然 $x=0$ 不是方程 $a^x=x$ 的解，所以存在非零常数 T，使 $a^T=T$.

于是对于 $f(x)=a^x$ 有 $f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x=T\cdot a^x=Tf(x)$，故 $f(x)=a^x\in M$.

8. 证明：(1) 由 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}+a\ln x$，

得 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)+\frac{a}{2}(\ln x_1+\ln x_2)$

$$=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+a\ln\sqrt{x_1x_2}.$$

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\frac{4}{x_1+x_2}+a\ln\frac{x_1+x_2}{2}$.

而 $\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)>\frac{1}{4}[(x_1^2+x_2^2)+2x_1x_2]=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$，　①

又 $(x_1+x_2)^2=(x_1^2+x_2^2)+2x_1x_2>4x_1x_2$，

所以 $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>\frac{4}{x_1+x_2}$.　②

因为 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，所以 $\ln\sqrt{x_1x_2}<\ln\frac{x_1+x_2}{2}$.

因为 $a\leqslant 0$，所以 $a\ln\sqrt{x_1x_2}\geqslant a\ln\frac{x_1+x_2}{2}$.　③

由①、②、③得

$\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}+a\ln\sqrt{x_1x_2}>\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\frac{4}{x_1+x_2}+a\ln\frac{x_1+x_2}{2}$.

即 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

(2) 证法一：由 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}+a\ln x$，得 $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}$.



所以 $|f'(x_1)-f'(x_2)|=\left|\left(2x_1-\frac{2}{x_1^2}+\frac{a}{x_1}\right)-\left(2x_2-\frac{2}{x_2^2}+\frac{a}{x_2}\right)\right|$

$=|x_1-x_2|\cdot\left|2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}-\frac{a}{x_1x_2}\right|$

$|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|\Leftrightarrow\left|2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}-\frac{a}{x_1x_2}\right|>1$

下面证明对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，有 $2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}-\frac{a}{x_1x_2}>1$ 恒成立.

即证 $a<x_1x_2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}$ 成立.

因为 $x_1x_2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}>x_1x_2+\frac{4}{\sqrt{x_1x_2}}$.

设 $t=\sqrt{x_1x_2}$，$u(t)=t^2+\frac{4}{t}(t>0)$，则 $u'(t)=2t-\frac{4}{t^2}$.

令 $u'(t)=0$ 得 $t=\sqrt[3]{2}$，列表如下：

t	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},+\infty)$
$u'(t)$	$-$	0	+
$u(t)$	↘	极小值 $3\sqrt[3]{4}$	↗

$u(t)\geqslant3\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{108}>4\geqslant a$，所以 $x_1x_2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}>a$.

所以对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，恒有 $|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$.

证法二 由 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}+a\ln x$，得 $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}$

所以 $|f'(x_1)-f'(x_2)|=\left|\left(2x_1-\frac{2}{x_1^2}+\frac{a}{x_1}\right)-\left(2x_2-\frac{2}{x_2^2}+\frac{a}{x_2}\right)\right|$

$=|x_1-x_2|\cdot\left|2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}-\frac{a}{x_1x_2}\right|$

因为 x_1,x_2 是两个不相等的正数.

所以 $2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}-\frac{a}{x_1x_2}>2+\frac{4}{(\sqrt{x_1x_2})^3}-\frac{a}{x_1x_2}\geqslant2+\frac{4}{(\sqrt{x_1x_2})^3}-\frac{4}{x_1x_2}$.

设 $t=\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$，$u(t)=2+4t^3-4t^2(t>0)$.

则 $u'(t)=4t(3t-2)$，列表



t	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$
$u'(t)$	$-$	0	$+$
$u(t)$	↘	极小值$\frac{38}{27}$	↗

所以 $u=\frac{38}{27}>1$，即 $2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}-\frac{a}{x_1x_2}>1$.

所以 $|f'(x_1)-f'(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot\left|2+\frac{2(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}-\frac{a}{x_1x_2}\right|>|x_1-x_2|$.

即对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，恒有 $|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$.

9. 解：(1) 易知 $Q_n(a_n,a_n^2)$，则 $P_{n+1}\left(\frac{a_n^2}{a},a_n^2\right)$，故 $Q_{n+1}\left(\frac{a_n^2}{a},\frac{a_n^4}{a^2}\right)$

所以 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a}$，两边取对数，得

$\ln a_{n+1}=2\ln a_n-\ln a\Rightarrow \ln a_{n+1}-\ln a=2(\ln a_n-\ln a)\Rightarrow \ln a_n-\ln a=(\ln a_1-\ln a)2^{n-1}\Rightarrow$

$\ln a_n=\ln a+\ln\left(\frac{a_1}{a}\right)^{2^{n-1}}\Rightarrow a_n=a\left(\frac{a_1}{a}\right)^{2^{n-1}}$

(2) 由于 $a=1$，所以 $a_n=(a_1)^{2^{n-1}}$，且 $a_{n+1}=a_n^2$，所以 $a_k-a_{k+1}=a_k(1-a_k)\leqslant\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}\leqslant\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k+2}$，易证：$a_1^4\leqslant\frac{1}{16}$，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k+2}=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_1)^{2^{k+1}}<\sum\limits_{k=4}^{2^{n+1}}(a_1)^k<$

$\frac{a_1^4}{1-a_1}\leqslant\frac{1}{8}$，得证.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}=\sum\limits_{k=1}^{n}((a_1)^{2^{k-1}}-(a_1)^{2^k})(a_1)^{2^{k+1}}$，注意到：令 $a_1=t<1$，$2^{k-1}=r$，

则 $((a_1)^{2^{k-1}}-(a_1)^{2^k})(a_1)^{2^{k+1}}$

$=(t^r-t^{2r})t^{4r}=[(t^r-t^{r+1})+(t^{r+1}-t^{r+2})+\cdots+(t^{2r-1}-t^{2r})]t^{4r}$

$\leqslant(t^r-t^{r+1})t^{2r+2}+(t^{r+1}-t^{r+2})t^{2(r+1)+2}+\cdots+(t^{2r-1}-t^{2r})t^{2(2r-1)+2}$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}((a_1)^{2^{k-1}}-(a_1)^{2^k})(a_1)^{2^{k+1}}\leqslant\sum\limits_{r=1}^{\infty}(t^r-t^{r+1})t^{2r+2}<\sum\limits_{r=1}^{\infty}(1-t)t^{3r+2}=(1-t)\frac{t^5}{1-t^3}$

$=\frac{t^5}{1+t+t^2}<\frac{t^5}{3t^5}=\frac{1}{3}$ 得证.

10. (1) $f_3(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$，$f'_3(x)=-1+x-x^2<0$.

所以 $f_3(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数.

$f_4(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$，$f'_4(x)=-1+x-x^2+x^3=(x-1)(x^2+1)$.



所以 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'_4(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'_4(x)>0$.

所以 $f_4(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

(2)当 n 为偶数时，

$f'_n(x)=-1+x-x^2+x^3-\cdots+x^{n-1}=(x-1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{n-2})$

在 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'_n(x)<0$，在 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'_n(x)>0$.

当 n 为偶数时，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数

所以 $[f_n(x)]_{min}=f_n(1)=(1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n}>0$

所以 n 为偶数时，$f_n(x)=0$ 无实数解.

当 n 为奇数时，

$f'_n(x)=-1+x-x^2+x^3-\cdots-x^{n-1}=-\frac{1+x^n}{1+x}<0$，

所以 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数.

又 $f_n(1)>0$，$f_n(n)=(1-n)+n^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+n^{n-1}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<0$.

所以 n 为奇数时，$f_n(x)=0$ 有唯一解.

综上：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，方程 $f_n(x)=0$ 至多有一实数解.

11. 解：设过长方体一顶点处的三条棱长为 x,y,z，则

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\2(xy+yz+zx)=\frac{16}{27},\end{cases}$$

又 $yz=\frac{8}{27}-x(y+z)=\frac{8}{27}-x(1-x)$，

所以长方体的体积 $V=f(x)=xyz=x\left[\frac{8}{27}-x(1-x)\right]=x^3-x^2+\frac{8}{27}x$.

注意到 $y+z=1-x$，

故 y,z 为方程 $t^2-(1-x)t+x^2-x+\frac{8}{27}=0$ $\quad(*)$的两个实数根.

所以 $\Delta=(1-x)^2-4\left(x^2-x+\frac{8}{27}\right)\geqslant0\Rightarrow\frac{1}{9}\leqslant x\leqslant\frac{5}{9}$，在此条件之下显然有$(*)$的两个根在(0,1)之间，故满足条件的 $x\in\left[\frac{1}{9},\frac{5}{9}\right]$

$f'(x)=3x^2-2x+\frac{8}{27}=3\left(x-\frac{2}{9}\right)\left(x-\frac{4}{9}\right)$，所以



x	$\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$	$\frac{2}{9}$	$\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right)$	$\frac{4}{9}$	$\left(\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right]$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $V_{max}=f\left(\frac{2}{9}\right)=f\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{20}{729}$，$V_{min}=f\left(\frac{4}{9}\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{729}$

所以长方体的最大值为$\frac{20}{729}$，最小值为$\frac{16}{729}$

12. 解 (1)由 $f(x)=\log_a\frac{1-m(x-2)}{x-3}$ 及 $f(2-x)+f(2+x)=0$ 得

$\log_a\frac{1-m((2-x)-2)}{(2-x)-3}+\log_a\frac{1-m((2+x)-2)}{(2+x)-3}=0$.

解之得 $m=\pm1$.

当 $m=1$ 时，函数 $f(x)$ 无意义，所以 $m=-1$.

(2)$m=-1$ 时，$f(x)=\log_a\frac{x-1}{x-3}$，其定义域为 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

所以，$(b,a)\subset(-\infty,1)$ 或 $(b,a)\subset(3,+\infty)$.

①若 $(b,a)\subset(3,+\infty)$，则 $3\leqslant b<a$.

为研究 $x\in(b,a)$ 时 $f(x)$ 的值域，可考虑 $f(x)=\log_a\frac{x-1}{x-3}$ 在 $(3,+\infty)$ 上的单调性.

下证 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减

任取 $x_1,x_2\in(3,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$\frac{x_1-1}{x_1-3}-\frac{x_2-1}{x_2-3}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-3)(x_2-3)}>0$.

又 $a>1$，所以，$\log_a\frac{x_1-1}{x_1-3}>\log_a\frac{x_2-1}{x_2-3}$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以，当 $(b,a)\subset(3,+\infty)$，$f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减.

由题知 $x\in(b,a)$ 时，$f(x)$ 的取值范围恰为 $(1,+\infty)$，所以，必有 $b=3$ 且 $f(a)=1$，解之得 $a=2+\sqrt{3}$（因为 $a>3$，所以舍去 $a=2-\sqrt{3}$）.

②若 $(b,a)\subset(-\infty,1)$，则 $b<a\leqslant1$. 又由于 $a>0$，$a\neq1$，所以，$0<a<1$

此时，同样可证 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增（证明过程略）.

所以，$f(x)$ 在 (b,a) 上的取值范围应为 $(f(b),f(a))$，而 $f(a)$ 为常数，故 $f(x)$ 的取值范围不可能恰为 $(1,+\infty)$. 在这种情况下，a，b 无解.

综上，符合题意的实数 a，b 的值为 $a=2+\sqrt{3}$，$b=3$.

点评　本题(2)中，若能充分运用已知条件，可以减少分类讨论的次数



13. 解 (1) $f(x)$是偶函数 $\Rightarrow f(-1)=f(1)\Rightarrow k=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x$；

(2) 证法一：$f(x)=\frac{1}{2}x+b\Leftrightarrow 4^x+1=4^{x+b}$，假定存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，使得 $4^{x_1}+1=4^{x_1+b}$，$4^{x_2}+1=4^{x_2+b}$，则两式相减得 $4^{x_1}-4^{x_2}=4^b(4^{x_1}-4^{x_2})\Rightarrow b=0$，但当 $b=0$ 时，$4^x+1=4^x$ 是不可能成立的，假定为假，命题为真

证法二：$f(x)=\frac{1}{2}x+b\Leftrightarrow b=\log_4(4^x+1)-x$，　　①

令 $g(x)=\log_4(4^x+1)-x$，则 $g'(x)=-\frac{1}{4^x+1}<0$，所以函数 $g(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数，因此，对任意实数 b，方程①最多只有一个实数解，亦即函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 最多只有一个交点；

(3) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 4^x+1=a\left(4^x-\frac{4}{3}\cdot 2^x\right)$，令 $2^x=t>0$，则原问题等价于关于 t 的方程 $(a-1)t^2-\frac{4}{3}at-1=0$ 只有一个正实根，从而有：

①若 $a-1=0$，即 $a=1$，则 $t=-\frac{3}{4}$，不合题意，舍去；

②若 $\Delta=\frac{16}{9}a^2+4(a-1)=0$，即 $a=\frac{3}{4}$ 或 $a=-3$，经检验，$a=-3$ 符合题意；

③方程有一个正根和一个负根，即 $\frac{-1}{a-1}<0$，即 $a>1$ 符合题意

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{-3\}\cup(1,+\infty)$。

14. 证明：(1) 当 $n=1$ 时，$a_2=2a$，则 $\frac{a_2}{a_1}=a$；

$2\leqslant n\leqslant 2k-1$ 时，$a_{n+1}=(a-1)S_n+2$，$a_n=(a-1)S_{n-1}+2$，

$a_{n+1}-a_n=(a-1)a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列。

解：(2) 由(1)得 $a_n=2a^{n-1}$，所以 $a_1a_2\cdots a_n=2^na^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^na^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{n+\frac{n(n-1)}{2k-1}}$，

$b_n=\frac{1}{n}\left[n+\frac{n(n-1)}{2k-1}\right]=\frac{n-1}{2k-1}+1\ (n=1,2,\cdots,2k)$。

(3) 设 $b_n\leqslant\frac{3}{2}$，解得 $n\leqslant k+\frac{1}{2}$，又 n 是正整数，于是当 $n\leqslant k$ 时，$b_n<\frac{3}{2}$；

当 $n\geqslant k+1$ 时，$b_n>\frac{3}{2}$。

原式 $=\left(\frac{3}{2}-b_1\right)+\left(\frac{3}{2}-b_2\right)+\cdots+\left(\frac{3}{2}-b_k\right)+\left(b_{k+1}-\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(b_{2k}-\frac{3}{2}\right)$



$$(b_{k+1}+\cdots+b_{2k})-(b_1+\cdots+b_k)$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{2}(k+2k-1)k}{2k-1}+k\right]-\left[\frac{\frac{1}{2}(0+k-1)k}{2k-1}-k\right]=\frac{k^2}{2k-1}.$$

由 $\frac{k^2}{2k-1}\leqslant 4$，得 $k^2-8k+4\leqslant 0$，$4-2\sqrt{3}\leqslant k\leqslant 4+2\sqrt{3}$，又 $k\geqslant 2$。

所以当 $k=2,3,4,5,6,7$ 时，原不等式成立。

15. 解：由题设知，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，不等式 $1+2^x+4^x\cdot a>0$ 恒成立

分离参数，得 $a>-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$， ①

要使①对 $x\in(-\infty,1)$ 恒成立，a 应不小于 $-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ 的最大值

因为 $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 和 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty,1)$ 上都是减函数，所以 $-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ 在 $(-\infty,1)$ 上为增函数

所以当 $x=1$ 时，$-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ 取最大值 $-\frac{3}{4}$，故 $a\geqslant-\frac{3}{4}$。

16. (1)证明 设 $x_1<x_2<0$，则 $-x_1>-x_2>0$，因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是增函数，

所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$，又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $-f(x_1)>-f(x_2)$，$f(x_1)<f(x_2)$。

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是增函数。

(2)解：由 $f(1)=0$ 得 $f(-1)=-f(1)=0$，原方程即

$f[\log_a(1-x^2)+1]=f(\pm 1)$。 ①

方程①等价于下列混合组：

$$\begin{cases}1-x^2>0\\ \log_a(1-x^2)+1>0\\ \log_a(1-x^2)+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1,\\ \log_a(1-x^2)=0.\end{cases}$$

解得 $x=0$。

或方程①等价于下列混合组：

$$\begin{cases}1-x^2>0\\ \log_a(1-x^2)+1<0\\ \log_a(1-x^2)+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1,\\ \log_a(1-x^2)=-2.\end{cases}$$

所以 $x=\pm\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$。

所以原方程解集为 $\left\{-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}},\sqrt{1-\frac{1}{a^2}},0\right\}$。



(3)由 $\log_{\frac{1}{2}}|f(t)+1|>0$ 得 $0<|f(t)+1|<1$，即

$-2<f(t)<-1$，或 $-1<f(t)<0$.

由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内是增函数，只需求出 $f(t)=-2,-1,0$ 依次对应的 t 值，即可求出 t 的取值范围.

因为 $f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$，$f(1)=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=0$，$f(-1)=f(1)=0$

又 $f(-2)=-1$，$f(2)=1$，所以 $f(4)=f(2)+f(2)=2$，$f(-4)=-f(4)=-2$，

而 $f(2)=f\left(4\cdot\frac{1}{2}\right)=f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)-f(4)=1-2=-1$，

$f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$，即 $f(-4)<f(t)<f(-2)$，

$f(-2)<f(t)<f(-1)$ 或 $f\left(\frac{1}{4}\right)<f(t)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(t)<f(1)$

由 $f(t)$ 是增函数，得 t 的取值范围是 $(-4,-2)\cup(-2,-1)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

点评 能找到一个满足题设条件的函数 $f(x)$，如 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(-x)(x<0)\\-\log_{\frac{1}{2}}x(x>0)\end{cases}$.

第六讲　抽象函数的基本问题

1. D　**2.** C

3. 先求出函数 $f(x)=x^3-x+a$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值 $[f(x)]_{max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}+a$ 以及最小值 $[f(x)]_{min}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}+a$，从而对任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}+a\right)-\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}+a\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}<1.$$

因此，函数 $f(x)=x^3-x+a(x\in[-1,1],a\in\mathbf{R})$ 是"Storm 函数".

4. D

5. B　解析：设 $x=f[g(x)]=0$ 具有实数解 x_0，则 $x_0=f[g(x_0)]$，令 $g(x_0)=u_0$，则 $x_0=f(u_0)$，将其代入 $g(x_0)=u_0$，得 $g[f(u_0)]=u_0$.

这说明方程 $g[f(x)]=x$ 有一实数解 u_0，但 $x^2+x+\frac{1}{5}=x$ 无实数根，故选 B.

6. 解：(1)令 $x=y=0$，得 $f(0)=1$；令 $x=0$，得 $f(y)+f(-y)=2f(y)$，$f(-y)=f(y)$，$f(x)$ 是偶函数



(2)证明：①取 $y=\frac{c}{2}$，得 $f\left(x+\frac{c}{2}\right)+f\left(x-\frac{c}{2}\right)=2f(x)f\left(\frac{c}{2}\right)=0$，令 $x+\frac{c}{2}$ 代替 x，即得 $f(x+c)=-f(x)$.

②由 $f(x+c)=-f(x)$ 得 $f(x+2c)=-f(x+c)=-[-f(x)]=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，且它的一个周期为 $2c$.

点评 证 $f(x+c)+f(x)=0$，即显然

7.(1)在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 中，令 $m=1$，$n=0$，得 $f(1)=f(1)\cdot f(0)$

因为 $f(1)\neq 0$，所以 $f(0)=1$

(2)要判断 $f(x)$ 的单调性，可任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且设 $x_1<x_2$

在已知条件 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 中，若取 $m+n=x_2$，$m=x_1$，则已知条件可化为 $f(x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)$.

由于 $x_2-x_1>0$，所以 $1>f(x_2-x_1)>0$.

为比较 $f(x_2)$、$f(x_1)$ 的大小，只需考虑 $f(x_1)$ 的正负即可.

在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 中，令 $m=x$，$n=-x$，则得 $f(x)\cdot f(-x)=1$.

因为 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$.

所以当 $x<0$ 时，$f(x)=\frac{1}{f(-x)}>1>0$

又 $f(0)=1$，所以，综上可知，对于任意 $x_1\in\mathbf{R}$，均有 $f(x_1)>0$

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]<0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

(3)首先利用 $f(x)$ 的单调性，将有关函数值的不等式转化为不含 f 的式子.

$f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)$ 即 $x^2+y^2<1$.

$f(ax-y+\sqrt{2})=1=f(0)$，即 $ax-y+\sqrt{2}=0$.

由 $A\cap B=\varnothing$，所以，直线 $ax-y+\sqrt{2}=0$ 与圆面 $x^2+y^2<1$ 无公共点. 所以，

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 1$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 1$.

(4)如 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

8. 解：(1)令 $x=y=0$，可得 $f(0)=0$.

令 $y=-x$，则 $f(0)=f(-x)+f(x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)设 $-3\leqslant x_1<x_2\leqslant 3$，$y=-x_1$，$x=x_2$.

则 $f(x_2-x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2)-f(x_1)$，因为 $x>0$ 时，$f(x)<0$，

故 $f(x_2-x_1)<0$，即 $f(x_2)-f(x_1)<0$.

所以 $f(x_2)<f(x_1)$，$f(x)$ 在区间$[-2003,2003]$上单调递减.



所以 $x=-2003$ 时，$f(x)$有最大值 $f(-2003)=-f(2003)=-f(2002+1)=-[f(2002)+f(1)]=-[f(2001)+f(1)+f(1)]=\cdots=-2003f(1)=4006$.

$x=2003$ 时，$f(x)$有最小值为 $f(2003)=-4006$.

(3)由原不等式，得 $\frac{1}{2}[f(bx^2)-f(b^2x)]>f(x)-f(b)$，

即 $f(bx^2)+f(-b^2x)>2[f(x)+f(-b)]$，

所以 $f(bx^2-b^2x)>2f(x-b)$，

即 $f[bx(x-b)]>f(x-b)+f(x-b)$，

所以 $f[bx(x-b)]>f[2(x-b)]$.

由 $f(x)$在 $x\in\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $bx(x-b)<2(x-b)$，

所以 $(x-b)(bx-2)<0$

因为 $b^2\geqslant 2$，所以 $b\geqslant\sqrt{2}$ 或 $b\leqslant-\sqrt{2}$.

①当 $b>\sqrt{2}$ 时，$b>\frac{2}{b}$，不等式的解集为$\{x|\frac{2}{b}<x<b\}$；

②当 $b<-\sqrt{2}$ 时，$b<\frac{2}{b}$，不等式的解集为$\{x|x<b$ 或 $x>\frac{2}{b}\}$；

③当 $b=-\sqrt{2}$ 时，不等式的解集为$\{x|x\neq-\sqrt{2}$，且 $x\in\mathbf{R}\}$；

当 $b=\sqrt{2}$ 时，不等式解集为$\varnothing$.

9. (1)证明：因为 $f(4-x)=f[(2-x)+2]=f[2-(2-x)]=f(x)$

$f(14-x)=f[(7-x)+7]=f[7-(7-x)]=f(x)$

(2)解：$f(x)=f[(2-x)+2]=f(4-x)=f[7-(3+x)]=f[(3+x)+7]=f(x+10)$

所以 $y=f(x)$是周期为 10 的周期函数.

(3)当 $x\in[16,17]$时，$x-10\in[6,7]$

所以 $f(x)=f(10-x)=(x-10)^2$.

当 $x\in[17,20]$时，$24-x\in[4,7]$，

所以 $f(x)=f(x-10)=f[14-(24-x)]=f(24-x)=(24-x)^2$

所以 $f(x)=\begin{cases}(x-10)^2, x\in[16,17],\\(24-x)^2, x\in[17,20]\end{cases}$

当 $x\in[16,17]$时，$f(x)$的最小值为 36，且 $f(x)<49$.

当 $x\in[17,20]$时，$f(x)$的最小值为 16，最大值为 49.

所以 $f(x)$的最大值为 49 和最小值为 16.

点评　本题函数 $f(x)$以抽象函数为相关背景，考查了函数的概念、周期性、最值等基础知识，深刻考查了运算能力和逻辑思维能力．本题解决的关键是充分利用 $f(x+2)$



$f(2+x)=f(2-x)$，$f(x+7)=f(7-x)$这一条件。事实上：

(1) 满足$f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$（a是大于零的常数）的$f(x)$是周期为$2a$的周期函数

(2) 满足$f(x+a)=f(x-a)(a\neq 0)$的函数$f(x)$是以$2|a|$为周期的函数

(3) 满足$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)(b>a)$的函数$f(x)$是以$2(b-a)$为周期的函数

(4) $f(x)$是奇函数，满足$f(a-x)=-f(a+x)(a\neq 0)$的函数$f(x)$是以$2a$为周期的函数

(5) $f(x)$是偶函数，满足$f(a-x)=-f(a+x)(a\neq 0)$的函数$f(x)$是以$4a$为周期的函数。

综上所述，由于抽象函数是由特殊的、具体的函数抽象而成的，故有关抽象函数问题的解决，我们往往可以从它的各个方面给予考虑，这是比较有效的

10. 简解：(1) $f(0)=f(1)=0$；(3) $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$

11. 解：(1) 设$P(x_0,y_0)$是$y=f(x)$图象上任一点，则$y_0=\frac{x_0+1-a}{a-x_0}$，

点P关于点$(a,-1)$的对称点是$P'(2a-x_0,-2-y_0)$

因为$f(2a-x_0)=\frac{(2a-x_0)+1-a}{a-(2a-x_0)}=\frac{a+1-x_0}{x_0-a}$，$-2-y_0=\frac{a+1-x_0}{x_0-a}$，

所以$f(2a-x_0)=-2-y_0$，

即点P'在$y=f(x)$的图象上

所以函数$y=f(x)$的图象关于点$(a,-1)$成中心对称图形。

(2) 因为$[f(x)+2]\left[f(x)+\frac{3}{2}\right]=\frac{(x-a-1)(x-a-2)}{2(a-x)^2}$，$x\in[a+1,a+2]$，

所以$[f(x)+2]\left[f(x)+\frac{3}{2}\right]\leqslant 0$，

所以$-2\leqslant f(x)\leqslant-\frac{3}{2}$

(3) ① 由已知只需$x\neq a$时，$f(x)=x$有实数解，即$\frac{x+1-a}{a-x}=x$有实数解

即$x^2+(1-a)x+1-a=0$有不等于a的解，则

$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x\neq a\end{cases}$，所以$a\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

② 由已知，应满足$x\neq a$时，$\frac{x+1-a}{a-x}=a$无实数解，即

$x\neq a$时$(1+a)x=a^2+a-1$无实数解。



由于 $x=a$ 不是方程 $(1+a)x=a^2+a-1$ 的解，则对任意 $x\in\mathbf{R}$，

方程 $(1+a)x=a^2+a-1$ 无实数解，故 $a=-1$。

12. 解 (1) 对任意 $x\in[1,2]$，$\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+2x}$，$x\in[1,2]$，$\sqrt[3]{3}\leqslant\varphi(2x)\leqslant\sqrt[3]{5}$，$1<\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{5}<2$，所以 $\varphi(2x)\in(1,2)$。

对任意的 $x_1,x_2\in[1,2]$，

$$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|=|x_1-x_2|\cdot\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+2x_2)}+\sqrt[3]{(1+2x_2)^2}},$$

$3<\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+2x_2)}+\sqrt[3]{(1+2x_2)^2}$，

所以 $0<\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+2x_2)}+\sqrt[3]{(1+2x_2)^2}}<\dfrac{2}{3}$，

令 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+2x_2)}+\sqrt[3]{(1+2x_2)^2}}=L$，$0<L<1$，

$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$，

所以 $\varphi(x)\in A$。

(2) 反证法：设存在 $x_0,x'_0\in(1,2)$，$x_0\neq x'_0$，使得 $x_0=\varphi(2x_0)$，$x'_0=\varphi(2x'_0)$，

由 $|\varphi(2x_0)-\varphi(2x'_0)|\leqslant L|x_0-x'_0|$，得 $|x_0-x'_0|\leqslant L|x_0-x'_0|$，所以 $L\geqslant 1$，矛盾，故结论成立。

(3) $|x_3-x_2|=|\varphi(2x_2)-\varphi(2x_1)|\leqslant L|x_2-x_1|$，$\cdots$，$|x_{n+1}-x_n|\leqslant L^{n-1}|x_2-x_1|$，

$$\begin{aligned}|x_{k+p}-x_k|&=|(x_{k+p}-x_{k+p-1})+(x_{k+p-1}-x_{k+p-2})+\cdots+(x_{k+1}-x_k)|\\&\leqslant|x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|\\&\leqslant L^{k+p-2}|x_2-x_1|+L^{k+p-3}|x_2-x_1|+\cdots+L^{k-1}|x_2-x_1|\leqslant\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

13. 解 (1) 由 $\begin{cases}f(2-x)=f(2+x)\\f(7-x)=f(7+x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=f(4-x)\\f(x)=f(14-x)\end{cases}\Rightarrow f(4-x)=f(14-x)\Rightarrow$ $f(x)=f(x+10)$，从而知函数 $y=f(x)$ 的周期为 $T=10$。

又 $f(3)=f(1)=0$，而 $f(7)\neq0$，

$f(-3)=f(-3+10)=f(7)\neq0$，所以 $f(-3)\neq\pm f(3)$，

故函数 $y=f(x)$ 是非奇非偶函数；

(2) 又 $f(3)=f(1)=0$，$f(11)=f(13)=f(-7)=f(-9)=0$

故 $f(x)$ 在 $[0,10]$ 和 $[-10,0]$ 上均有两个解，从而可知函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2005]$ 上有 402 个解，在 $[-2005,0]$ 上有 400 个解，所以函数 $y=f(x)$ 在 $[-2005,2005]$ 上有 802 个解。



14.(1)证明 在②中令 $x=1$

(2)当 $u,v\in[-1,0]$或$[0,1]$时,结论是显然的.现在不妨设 $u\in[-1,0]$,$v\in[0,1]$,这样,当 $v-u\leqslant 1$ 时,结论是显然的.当 $v-u>1$ 时,由于

$|f(u)-f(v)|=|f(u)-f(-1)+f(1)-f(v)|\leqslant|f(u)-f(-1)|+|f(1)-f(v)|\leqslant u+1+1-v=2-(v-u)<1$,证毕.

(3)不存在.不然,由于函数为奇函数,故 $f(0)=0$.这样有 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{1}{2}$,但有 $\left|f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\geqslant\frac{1}{2}$,矛盾.

第七讲　函数方程

1.(1)$\frac{12x-8}{5x}$　(2)$-x^2-2x+2$ $(-2\leqslant x\leqslant 0)$　(3)0,1

2. 由题设 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$ ①

将 $x=\frac{x-1}{x}$,$\frac{1}{1-x}$ 分别代入①中,得

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x-1}{x} \quad ②$$

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2-x}{1-x} \quad ③$$

从①、②、③中消去 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$,$f\left(\frac{1}{1-x}\right)$,得

$$f(x)=\frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)}$$

3. 用 $-x$ 代方程中的 x,并将原方程与所得新方程联立得

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=1993x\sqrt{9-x^2}+x^{1994},\\ f(x)-g(x)=-1993x\sqrt{9-x^2}+x^{1994}\end{cases}$$

解方程组得

$f(x)=x^{1994}$,

$g(x)=1993x\sqrt{9-x^2}$

4. 令 $x=y$ 代入原方程,得 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}$,于是 $\frac{\sin x+\cos x}{2}+\frac{\sin y+\cos y}{2}+g(x)-g(y)=\sin x+\cos y$,即

$$g(x)-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=g(y)-\frac{1}{2}\sin y+\frac{1}{2}\cos y.$$



由此可知，$g(x)-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ 是一个常数，故所求的函数方程的解为

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}, \\ g(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2}+C, \end{cases}$$

其中 C 为常数.

5. 令 $x=y$，得 $f(1)=f(x)-f(x)=0$，显然 $f(x^1)=1\cdot f(x)$，设 $n=k$ 时，$f(x^k)=kf(x)$，那么 $n=k+1$ 时，

$$f(x^{k+1})=f\left(\frac{x^k}{\frac{1}{x}}\right)=f(x^k)-f\left(\frac{1}{x}\right)=kf(x)-[f(1)-f(x)]=(k+1)f(x).$$

故对一切正整数 n，$f(x^n)=nf(x)$.

6. 设 $f(1)=r$，若 $f(m)=n$，则

$f(2n)=f(f(m)+f(m))=2m$.

令 $m=1$，$n=r$，得 $f(2r)=2$. 从而 $r=1$. 否则，设 $r=a+1$，$a\in\mathbf{N}$，$f(a)=b$，$b\in\mathbf{N}$，于是 $f(2b)=f(f(a)+f(a))=2a$，并且

$2b+2r=f(f(2b)+f(2r))=f(2a+2)=f(2r)=2$.

即 $r+b=1$，矛盾. 所以 $f(1)=1$. 若 $f(n)=n$，则 $f(n+1)=f(f(n)+f(1))=n+1$. 故 $f(n)=n$ 对一切正整数 n 成立. 因此 $f(2007)=2007$.

7. 令 $y=1$，由 $f(1)=2$，可得 $f(x+1)-f(x)=1$. ①

于是对整数 n，由①式可得 $f(x+n)-f(x)=n$，所以 $f\left(n+\frac{1}{m}\right)=f\left(\frac{1}{m}\right)+n$, ②

$f(n)=n+1$. ③

令 $x=m$，$y=\frac{1}{m}$，代入已给方程，得

$f(1)=f(m)f\left(\frac{1}{m}\right)-f\left(m+\frac{1}{m}\right)+1$. ④

将②、③及 $f(1)=2$ 代入④，得 $f\left(\frac{1}{m}\right)=1+\frac{1}{m}$. ⑤

令 $x=n$，$y=\frac{1}{m}$，代入已给方程，并以②、③、⑤代入，得 $f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}+1$.

因此，满足条件的从 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的函数为 $f(x)=x+1$.

8. 解 将 $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$ 记为①，记 A 为函数 f 的象集，设 $f(0)=c$.

在①中令 $x=y=0$，有 $f(-c)=f(c)+c-1$.



所以 $c\neq 0$。

在①中令 $x=f(y)$，有 $f(0)=f(x)+x^2+f(x)-1$，

故 $f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}$，$x\in\mathbf{R}$. ②

在①中令 $y=0$，又有 $f(x-c)=f(c)+cx+f(x)-1$，

所以 $f(x-c)-f(x)=f(c)-1+cx$，$x\in\mathbf{R}$.

注意到 $c\neq 0$，因此当 x 取遍实数集的时候，$cx+f(c)-1$ 也取遍整个实数集，即 $\{f(c)-1+cx\mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$.

于是 $\{f(x-c)-f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$.

因此，对任何实数 x，存在 $y_1=f(x'-c)$ 及 $y_2=f(x')$，使得

$x=y_1-y_2$.

再利用②，有

$$f(x)=f(y_1-y_2)=f(y_2)+y_1y_2+f(y_1)-1$$

$$=\frac{c+1}{2}-\frac{y_2^2}{2}+y_1y_2+\frac{c+1}{2}-\frac{y_1^2}{2}-1=c-\frac{1}{2}(y_1-y_2)^2=c-\frac{1}{2}x^2. \quad ③$$

比较②、③两式即得 $c=1$.

于是所求的函数为 $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$，$x\in\mathbf{R}$. 不难验证其满足所有条件.

9. 题目给的是一个不等式，而不是等式方程，而且变元有三个，即 x,y,z，我们设法通过取一些特殊值来寻求结果.

令 $x=y=z=1$，代入已知，得 $f(1)-f^2(1)\geqslant\frac{1}{4}$，所以 $\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$

故 $f(1)=\frac{1}{2}$. ①

令 $y=z=1$，代入已知并利用①，得 $f(x)-\frac{1}{2}f(x)\geqslant\frac{1}{4}$，所以 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$. ②

令 $x=y=z=0$，代入已知，得 $f(0)-f^2(0)\geqslant\frac{1}{4}$，所以 $f(0)=\frac{1}{2}$ ③

令 $x=0$，代入已知并利用③，得 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f(yz)\geqslant\frac{1}{4}$，故 $f(yz)\leqslant\frac{1}{2}$

所以 $f(x)\equiv\frac{1}{2}$

10. 易知 $f(x)$ 是偶函数，所以只需对 $x\geqslant 0$ 的情形进行证明

当 $x=y=0$，得 $f(0)=(f(0))^2$，

因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(0)=1$，从而 $f(0)=(f(1))^2$.

当 n 为正整数时，先证如下命题：



$f(\sqrt{n}y)=(f(y))^n$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，$y\in\mathbf{R}^+$． ①

$n=1$ 时，①显然成立．

设 $n=k$ 时①成立，那么 $n=k+1$ 时，

$$f(\sqrt{k+1}y)=f(\sqrt{ky^2+y^2})=f(\sqrt{k}y)f(y)$$
$$=(f(y))^k f(y)=(f(y))^{k+1}$$

从而①得证

令 $y=1$ 及 $y=\sqrt{n}$ 代入①式，分别得

$f(\sqrt{n})=(f(1))^n$，$f(n)=(f(\sqrt{n}))^n$．

所以 $f(n)=(f(1))^{n^2}$．

当 $x=\dfrac{p}{q}$（$p,q\in\mathbf{N}^*$ 且 $(p,q)=1$）时，

由于 $f(p)=(f(1))^{p^2}$，

$$f(p)=f\left(\sqrt{q^2}\cdot\frac{p}{q}\right)=\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^{q^2}$$

于是 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)^{q^2}=(f(1))^{p^2}$， ②

所以 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=(f(1))^{\frac{p^2}{q^2}}$．

由 f 的连续性，知对于无理数 x，也有

$f(x)=(f(1))^{x^2}$．

11. 解　用数学归纳法可证，满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的函数方程必满足

$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$

在上式中令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，

得 $f(nx)=nf(x)$． ①

以 $\dfrac{1}{n}x$ 代替 x，得 $f\left(\dfrac{1}{n}x\right)=\dfrac{1}{n}f(x)$．

再以 mx 代替 x（$m\in\mathbf{N}$），考虑到①，有 $f\left(\dfrac{m}{n}x\right)=\dfrac{m}{n}f(x)$．

又在已知条件中令 $x=y=0$，得 $f(0)=2f(0)$ 于是 $f(0)=0$，这样，若在原方程中取 $y=-x$，则有 $f(-x)=-f(x)$． ②

因而 $f\left(-\dfrac{m}{n}x\right)=-\dfrac{m}{n}f(x)$． ③

综合②、③，有 $f(rx)=rf(x)$． ④

其中 r 为有理数，x 为任意实数，特别地，当 $x=1$ 时，有 $f(r)=cr$．



其中 $c=f(1)$.

设 λ 是任意无理数，则必存在有理数 r_1,r_2，使 $r_1<\lambda<r_2$

不妨设 $f(x)$ 是单调递增的，故

$f(r_1)\leqslant f(\lambda)\leqslant f(r_2)$，

即 $cr_1\leqslant f(\lambda)\leqslant cr_2$ ⑤

因为可以使 r_1,r_2 无限接近 λ，故

$f(\lambda)=c\lambda$. ⑥

综合⑤ ⑥对任意实数 x，有 $f(x)=cx$，经检验，$f(x)=cx$ 是原方程的解.

12. 构造数列 $\{x_n\}$ 如下：

$x_0,x_1=x_0^2,x_2=x_1^2,\cdots,x=x_n=x_{n-1}^2$，

将它们代入所给函数方程，得

$f(x_1)-f(x_0)=1$，

$f(x_2)-f(x_1)=1$，

……

$f(x_n)-f(x_{n-1})=1$

将上面这些等式相加，有

$f(x)-f(x_0)=n$.

因为 $x=x_0^{2^n}$，所以

$\log_2\log_2 x-\log_2\log_2 x_0=n$.

因此，$f(x)=f(x_0)+\log_2\log_2 x-\log_2\log_2 x_0$.

令 $c=f(x_0)-\log_2\log_2 x_0$，那么

$f(x)=\log_2\log_2 x+c$.

容易验证：上面的 $f(x)$ 为所求.

13. 显然，$f(x)=x$ 是原函数方程的解，下面证明只有这个解

在原恒等式中令 $y=kx$，得

$$\frac{f(x)+f(kx)}{f(x)-f(kx)}=f\left(\frac{x+kx}{x-kx}\right)=f\left(\frac{1+k}{1-k}\right)=\frac{f(1)+f(k)}{f(1)-f(k)},$$

从而 $f(kx)=\frac{f(x)}{f(1)}\cdot f(k)$.

令 $k=0$，有 $f(0)\cdot\left(1-\frac{f(x)}{f(1)}\right)=0$.

由于 $f(x)$ 不恒等于 $f(1)$，所以 $f(0)=0$. 在原恒等式令 $y=0$，得 $f(1)=1$，于是

$f(kx)=f(k)f(x)$ ①

我们证明对于 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(n)=n$.



由①知 $f(4)=f^2(2)$. ②

再由原恒等式及①知 $\dfrac{f(2)+1}{f(2)-1}=f(3)$. ③

$\dfrac{f(4)+1}{f(4)-1}=f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{f(5)}{f(3)}$. ④

$\dfrac{f(3)+f(2)}{f(3)-f(2)}=f(5)$. ⑤

在②、③、④、⑤中消去 $f(3)$、$f(4)$、$f(5)$ 有

$$\frac{f^2(2)+1}{f^2(2)-1}=\frac{(f^2(2)+1)(f(2)-1)}{(f(2)+1)(1+2f(2)-f^2(2))}.$$

即 $f^2(2)=2f(2)$.

如果 $f(2)=0$，那么 $f\left(2\times\dfrac{1}{2}\right)=0$，与 $f(1)=1$ 矛盾.

所以 $f(2)=2$.

若 $f(n)=n$ 对 $n<2m$ 成立，则 $f(2m)=f(2)f(m)=2m$.

$$f(2m+1)=\frac{f(m+1)+f(m)}{f(m+1)-f(m)}=\frac{m+1+m}{m+1-m}=2m+1.$$

故 $f(n)=n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

在原式中令 $y=-x$，得

$f(x)+f(-x)=0$，故对一切整数 n 都有 $f(n)=n$.

又由 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{f(p)}{f(q)}=\dfrac{p}{q}$.

所以 $f(n)=n$ 对一切有理数 $n=\dfrac{p}{q}$ 成立，由函数的连续性知 $f(x)=x(x\in\mathbf{R})$.

14. 在原恒等式中取 $x=0$，得 $f(0)=0$，若任取 $x=a\neq0$，设

$f(a)=b_1$，$f(2a)=b_2$，由原恒等式可得

$$\begin{cases} f(4a)=b_1+b_2, \\ f(8a)=b_1+2b_2, \\ f(16a)=2b_1+3b_2, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

将原恒等式改写为 $f(x)=f(4x)-f(2x)$，

于是 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f(2x)-f(x)$，从而



$$\begin{cases} f\left(\dfrac{a}{2}\right)=b_2-b_1, \\ f\left(\dfrac{a}{4}\right)=-b_2+2b_1, \\ f\left(\dfrac{a}{8}\right)=2b_2-3b_1, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

可见，只要任给 f 在 $x=a$ 及 $x=2a$ 两处的值，f 在集合 $\{2^n a \mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 上的取值就唯一确定下来了。因此，只要任给定 $f(x)$ 在区间 $[1,2)$ 和 $[2,4)$ 上的值，f 在 $(0,+\infty)$ 上就完全确定了。同样，再给定 f 在 $[-1,-2]$ 和 $(-2,-1)$ 上的值，f 在 $(-\infty,0)$ 上也唯一确定了。记 $t_n=f(2^n x)$。

于是，由函数方程 $f(4x)=f(2x)+f(x)$，知 $t_n=t_{n-1}+t_{n-2}$，对应的特征方程为

$x^2=x+1$，

其根 $x_1,x_2=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

故 $t_n=a_1x_1^n+a_2x_2^n$。

由于 $t_0=f(x)$，$t_1=f(2x)$，有

$$\begin{cases} a_1+a_2=f(x), \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_1+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_2=f(2x). \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(f(2x)-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}f(x)\right), \\ a_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(f(2x)-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}f(x)\right). \end{cases}$$

因此，函数方程的解可表述如下：

$$f(x)=\begin{cases} g(x), \text{当 } 1\leqslant x<4 \text{ 或 } -4<x\leqslant -1, g(x) \text{ 任意给定}, \\ a_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+a_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{当 } 2^n\leqslant x<2^{n+1} \text{ 或 } -2^{n+1}<x\leqslant 2^n, n=-1,\pm2,\pm3,\pm4,\cdots \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(g\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right), \\ a_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-g\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right) \end{cases}$$



15. 解：

(1) $f\equiv 0, g(x)\equiv 0$，则为其解.

令 $x=0$，则 $f(yg(0))=g(0)$.

(2)若 $g(0)\neq 0$，则 $f(x)=g(0)$ 为常数 $=c$.

于是 $g(0)=g(x)+xg(0)$，$g(x)=(1-x)g(0)$，故 $f(x)=c$，$g(x)=(1-x)c$ 为其解.

(3)若 $g(0)=0$，则 $f(0)=0$，令 $y=0$，$f(x)=g(x)+xf(0)=g(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$.

故 $f(x+yf(x))=f(x)+xf(y)$，$f(x)=g(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$.

令 $y=0$，则 $f(x)=f(x)+xf(0)\Rightarrow f(0)=0$；

若 $f(x)=0$，则 $0=xf(0)\Rightarrow x=0$，即 $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$. (*)

令 $x=1$，$f(1+yf(1))=f(1)+f(y)$. ①

若 $f(1)\neq 1$，取 $y=\dfrac{1}{1-f(1)}$，则 $f(y)=f(1)+f(y)\Rightarrow f(1)=0$，与(*)矛盾！

所以 $f(1)=1$，$f(1+y)=1+f(y)$，$\forall y\in\mathbf{R}$. ②

特别地，$f(n)=n$，$n\in\mathbf{Z}$，取 $x=n\in\mathbf{Z}$，$y=z-1$ 代入方程

$f(nz)=f(n+(z-1)f(n))=n+nf(z-1)=nf(z)$，$\forall n\in\mathbf{Z}$，$z\in\mathbf{R}$.

$\Rightarrow f(rz)=rf(z)$，$\forall r\in\mathbf{Q}$，$z\in\mathbf{R}$. ③

由(3) $f(a)+f(-a)=0=f(a-a)$.

当 $a+b\neq 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(a)+f(b)&=f\left[\frac{a+b}{2}+\frac{\frac{a-b}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+f\left[\frac{a+b}{2}+\frac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\
&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}f\left[\frac{\frac{a-b}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right]+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}f\left[\frac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right]\\
&=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a+b).
\end{aligned}
$$

则 $f(yf(x))=xf(y)$（$f(x+yf(x))=f(x)+xf(y)$，$x+yf(x)\neq 0$）.

令 $y=1$，则 $f(f(x))=x$，所以 f 为双射.

将 x 换成 $f(x)$ 有 $f(xy)=f(x)f(y)$，$\forall x,y\in\mathbf{R}$.

令 $y=x$，则 $f(x^2)=f^2(x)>0$；令 $y=-x$，则 $f(-x^2)=f(x)f(-x)$.

推出 $f(x)>0\Leftrightarrow x>0$.

又因为 $f(x-f(x))=f(x)-x=-(x-f(x))$，所以 $f(x)-x=0$，$x\in\mathbf{R}$.



故 $f(x)=g(x)=x$.

16. 解：令 $x=0$ 代入条件得出 $f(0)=f(0)-f(0)-1$，所以 $f(0)=-1$.

令 $y=0$ 代入条件得出 $f(xf(0))=f(0)-2x^2f(0)-f(x)-1$，

所以 $f(x)+f(-x)=2(x^2-1)$.

再令 $x=1$，则有 $f(1)+f(-1)=0$，

而用 $-x$ 代入条件中得 $f(-xf(y))=f(-xy^2)-2x^2f(y)-f(-x)-1$， ①

①中与条件相加得

$f(-xf(y))+f(xf(y))$

$=f(-xy^2)+f(xy^2)-4x^2f(y)-[f(x)+f(-x)]-2$.

因为 $f(-xf(y))+f(xf(y))=2[(xf(y))^2-1]$，

$f(-xy^2)+f(xy^2)=2[(xy^2)^2-1]$，

所以 $2[(xf(y))^2-1]=2[x^2y^4-1]-4x^2f(y)-2(x^2-1)-2$，

于是 $2x^2f^2(y)=2x^2y^4-4x^2f(y)-2x^2$.

令 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，有 $f^2(y)=y^4-2f(y)-1$，

所以 $[f(y)+1]^2=y^4$，所以 $f(y)=y^2-1$ 或 $f(y)=-y^2-1$.

当 $f(y)=-y^2-1$ 时，$f(y)+f(-y)=2y^2-2$，所以 $f(-y)=3y^2-1$，

因为 $[f(-y)+1]^2=y^4$，所以 $9y^4=y^4\Rightarrow y=0$.

所以 $f(y)=y^2-1$，即 $f(x)=x^2-1$ 为所求.

17. 解：令 $x=y=0$ 有 $f(0)=0$；

令 $y=0$ 有 $f(x^2)=xf(x)=f((-x)^2)=-xf(-x)$，所以 $f(x)=-f(-x)$，$f(x)$ 是奇函数.

当 $a,b\geqslant0$ 时，令 $x=\sqrt{a}$，$y=\sqrt{b}$，有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，

所以 $f((x+1)^2)=(x+1)(f(x)+f(1))$，$f((x+1)^2)=xf(x)+2f(x)+f(1)(x\geqslant0)$，

所以 $f(x)=xf(1)(x\geqslant0)$.

又 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x)=f(1)x(x\in\mathbf{R})$，代入验证知符合题意.

18. 解：因为 f 为满射，故存在 a 使 $f(a)=0$，先令 $x=0$ 得 $f(y+f(y))=2y+f^2(0)$， ①

将 $y=a$ 代入，有 $2a+f^2(0)=0$，这说明只可能有 1 个 a 使 $f(a)=0$.

又在原式中分别令 $x=a$ 和 $x=-a$，得 $f^2(-a)=f^2(a)=0$，

故 $a=-a$，即 $a=0$，即 $f(0)=0$，且当 $x\neq0$ 时，$f(x)\neq0$，

在（*）中令 $y=0$，有 $f(x^2)=f^2(x)$.



令 $x=0$，有 $f(y+f(y))=2y$. ③

则可知 $\forall x>0, f(x)>0$。

由②知，$f^2(x)=f^2(-x)$，若存在 $y_0\neq 0$，使 $f(y_0)=f(-y_0)$（不妨设 $y_0>0$），则由③得

$f(f(y_0)-y_0)=f(f(-y_0)-y_0)=-2y_0<0$.

所以必有 $f(y_0)<y_0$，但在（*）中令 $y=-x^2$ 得 $f(f(-x^2))=-2x^2+f(x^2)$. ④

令 $x=\sqrt{y_0}$ 代入得 $f(f(y_0))=f(f(-y_0))=-2y_0+f(y_0)$，而此式左边 >0，右边由 $f(y_0)<y_0<0$，矛盾！

故对 $\forall y_0>0, f(y_0)=-f(y_0)$，即 f 为奇函数.

在④中令 $x=\sqrt{y}(y>0)$，有 $f(f(-y))=-2y+f(y)$，即 $f(y)+f(f(y))=2y$. ⑤

再令 $y=y^2$，有 $2y^2=f(y^2)+f(f(y^2))=(f(y))^2+f(f(y)^2)$

$$=(f(y))^2+(f(f(y)))^2.$$ ⑥

记 $f(y)=a, f(f(y))=b$，则有 $\left.\begin{matrix}a+b=2y\\a^2+b^2=2y^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=y, b=y$，即 $\forall y\in\mathbf{R}, y>0, f(y)=y$.

又 f 为奇函数，且 $f(0)=0$，故对 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=x$.

19. 解：令 $x=0$，$f(2f(y))=f(0)+y+f(y)$. (1)

所以 $f(2f(0))=2f(0)$，所以 $f(x+2f(2f(0)))=f(x)+2f(0)+f(2f(0))$，

$f(x+4f(0))=f(x)+4f(0)$.

而 $f(x+4f(0))=f(x+2f(0))+0+f(0)=f(x)+2f(0)$.

所以 $f(0)=0$.

由(1)有 $f(2f(y))=y+f(y)$. (2)

在（*）中令 $x=-f(y)$，故 $f(f(y))=f(-f(y))+y+f(y)$.

再在（*）中令 $y=-f(x)$，$f(x+2f(f(-x)))=f(f(-x))$.

由（*）中 $f(x)$ 为单射，故 $x+2f(-f(x))=-f(x)$，

将 x 换成 y，有 $f(-f(y))=-\dfrac{f(y)+y}{2}$.

所以 $f(f(y))=\dfrac{y+f(y)}{2}=\dfrac{1}{2}f(2f(y))$. (2′)

所以 $f(2f(y))=2f(f(y))$. (3)

所以由(2)有 $f(4f(f(y)))=f(2f(2f(y)))=2f(y)+f(2f(y))$



$$=2f(y)+2f(f(y))=3f(y)+y.$$

另一方面 $f(4f(f(y)))=f(2(y+f(y)))=f(2y)+y+f(y)$，

所以 $f(2y)=2f(y)$. (4)

故由(*)及(4)有 $f(x+f(2y))=f(x+2f(y))=f(x)+y+f(y)$

$$=f(x)+2f(f(y))=f(x)+f(f(2y))$$

所以 $f(x+f(y))=f(x)+f(f(y))$. (5)

于是，易知：$f(kf(y))=kf(f(y))$.

所以 $f(ky+y+f(y))=f((k+1)y)+f(f(y))=f(ky+f(f(2y)))$

$$=f(ky)+\frac{f(2y)+f(f(2y))}{2}=f(ky)+\frac{2f(y)+2f(f(y))}{2}.$$

所以 $f((k+1)y)=f(ky)+f(y)\Rightarrow f(ky)=kf(y)\quad(k\in\mathbf{Z})$.

所以当 $k\in\mathbf{Q}$ 时，亦有 $f(ky)=kf(y)$. (6)

$f(f(2f(x)-x))=\frac{1}{2}(f(2f(x)-x)+2f(x)-x)$ (由(2′))

$=\frac{1}{2}(f(-x+2f(x))+2f(x)-x)=\frac{1}{2}(f(-x)+x+f(x)+2f(x)-x)=f(x)$.

所以 $f(f(2f(x)-x))=f(x)\Rightarrow f(2f(x)-x)=x$.

所以 $f(x+y)=f(x+f(2f(y)-y))$ (由(5))

$$=f(x)+f(y).$$

由于 $f(x)$ 在零点连续，所以 $f(x)$ 在所有点连续，故

$f(x)=cx$ （c 为常数）.

解得 $c=1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=x$ 或 $f(x)=-\frac{x}{2}$.

经检验均满足条件.

